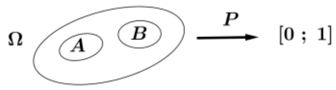
Chapitre 4 Calcul des probabilités conditionnelles

1 **) Cadre** On réalise une expérience aléatoire. Ω est l'ensemble = l'univers (souvent fini dans ce chapitre) des résultats possibles. On note $\pi(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.



Une probabilité P sur Ω est une application de $\pi(\Omega)$ sur [0 ; 1] vérifiant $P(\Omega)=1$ et :
si A et B sont des parties de Ω disjointes (on dit que ce sont des événements incompatibles), $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

On en déduit les propriétés $P(\varnothing)=0$, $P(A)+P(\overline{A})=1$ et $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

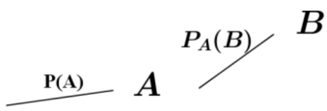
Cas de l'équiprobabilité : Ω est formé de n événement élémentaires qui ont tous même proba (donc proba = 1 / n). On a alors $P(A)=\dfrac{Nombre\ d'éléments\ de\ A}{Nombre\ d'éléments\ de\ \Omega}=\dfrac{Cardinal\ de\ A}{Cardinal\ de\ \Omega}=\dfrac{Nb\ de\ cas\ favorables}{Nb\ de\ cas\ possibles}$.

L'équiprobabilité est souvent sous-entendue (on prend une boule « au hasard »).

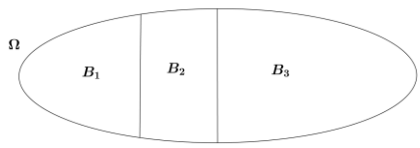
2) **Probabilités conditionnelles**

Définition Soit A un événement possible (c'est-à-dire que $P(A)\neq 0$). La **probabilité de** B **sachant** A (sachant que A est réalisé) est $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$. On peut vérifier que calculer avec cette probabilité P_A revient à restreindre l'univers à A (on « oublie » $\overline{A}$ = le contraire de A), par exemple, dans le cas de l'équiprobabilité, $P_A(B)=card(A\cap B)/card(A)$.

Bien sûr, $P(A\cap B)=P_A(B).P(A)$. Exemple : A = « a voté »,
avec $P(A)=0{,}8$, B = « a voté pour B » avec : B a eu 30 % des voix.
P(une personne au hasard a voté pour B) = 30% de 80%=0,3.0,8 = 0,24.

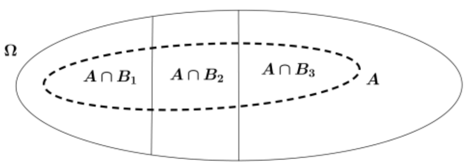


3) **Définition** : si Ω est la réunion disjointe de B_1, B_2 et B_3, on dit parfois que B_1, B_2 et B_3 forment une partition de Ω.



Ceci pourrait être vrai avec 2 ou 4 ou 5 etc… parties de Ω.

Alors toute partie A de Ω est la réunion disjointe de $A\cap B_1$, $A\cap B_2$ et $A\cap B_3$ donc
$P(A)=P(A\cap B_1)+P(A\cap B_2)+P(A\cap B_3)$.



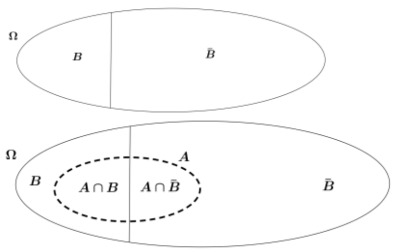
(une de ces trois probas pouvant valoir 0) C'est la **formule des probabilités totales**. C'est cette formule qu'on utilise quand on fait une somme de probas pour calculer $P(A)$ avec un arbre. Noter que si on divise cette identité par $P(A)$, on obtient $P_A(B_i)=1$: la somme des probas des branches partant de A vaut toujours 1.

4) **Définition** : deux événements A et B sont **indépendants** si
$P_A(B)=P(B)\Leftrightarrow P_B(A)=P(A)\Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A).P(B)$. Savoir qu'un des deux événements est réalisé ne dit rien (n'apporte pas d'information) sur les chances pour que l'autre soit réalisé. Exemple évident : on prend une carte sur 32, A = {c'est un roi}, B = {c'est un trêfle}.

Un cas particulier important de 3) est le cas : $\Omega = B \cup \overline{B}$ (réunion disjointe).

La formule des probas totales donne $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.

On en déduit facilement que A et indépendants $\Rightarrow A$ et $\overline{B}$ indépendants $\Rightarrow \overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants.



5) **Variables aléatoires**

C'est une grandeur X qui varie avec le hasard, précisément, c'est une application de Ω dans IR.
Elle est définie par sa **loi** = la donnée de tous les nombres du type $P(X = k)$.

Exemple : on prend une boule au hasard dans une boite contient une boule rouge, deux boules bleues et 5 boules blanches. X = le gain du joueur avec la règle :

on gagne 1 euro si la boule est blanche, 2 euros si elle est bleue et 10 euros si c'est la rouge. La loi de X est le tableau ci-contre.

x_i	1	2	10
$p_i = P(X = x_i)$	5/8	2/8	1/8

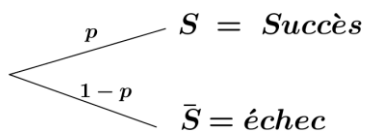
Définition : $E(X) = \sum p_i x_i$ est l'espérance de X , c'est une sorte de moyenne. Ci-dessus, $E(X)$ = 19/8.

$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right)$, c'est une mesure de la dispersion des valeurs de X autour de $E(X)$.

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$, homogène avec X , c'est à dire que si X est exprimée en euros, par exemple, $\sigma(X)$ aussi.

6) **Loi binomiale**

C'est la variable aléatoire la plus courante. On dit que X suit la loi binomiale $B(n; p)$ si X est le nombre de succès au cours de n épreuves de Bernoulli (voir ci-contre) **identiques et indépendantes**. n et p sont appelés les paramètres de $B(n; p)$.

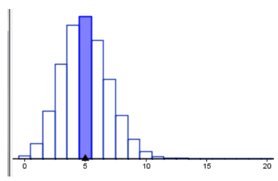


Définition $\binom{n}{k}$ est le nombre de branches de l'arbre obtenu qui contiennent k succès en n épreuves. Noter que

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$, pour tout k : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et (peu utile au bac) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, car {chemins avec k succès en n épreuves}est la réunion disjointe de.{chemins avec (k-1) succès en (n-1) épreuves + succès à la fin} et de .{chemins avec k succès en (n-1) épreuves + échec à la fin}.

Bien sûr, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. ($\binom{n}{k}$ branches ayant toutes pour proba $p^k (1-p)^{n-k}$).

A retenir (admis) : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
Exemple ci-contre : on prend n = 20 cartes dans un jeu de 32 (tirage avec remise), X = le nombre de cœurs obtenu : $p = 1/4$ et $E(X) = 5$, c'est toujours proche de la valeur la plus fréquente de X . En moyenne on obtient 5 cœurs.



Les machines calculent $P(X = k)$ et $P(X \le k)$, mais aussi, moins utile, les coefficients binomiaux « C-n-k ».