Exponentielles (chapitre 3) Résumé

Au départ exp est la fonction définie sur IR et vérifiant exp(0) = 1 et exp' =exp.

On note $\exp(1) = e$. On pourrait prouver que $e \approx 2{,}718$.

Ayant prouvé que pour tout entier positif n, $\exp(n) = e.e.e....e = e^n$, c'est-à-dire e à la puissance n (on dit aussi e exposant n), on écrit e^x à la place de $\exp(x)$ pour tout réel x (même si x n'est pas un entier).

Pour tous réels a, b, x, $e^a e^b = e^{a+b}$, notamment $\left(e^x\right)^2 = e^{2x}$. $e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$. On a donc $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$,

et aussi pour tout réel x, $e^x \succ 0$ (puisque $e^x = \left(e^{x/2}\right)^2$) ; donc exp' = exp > 0 et exp strictement ↗.

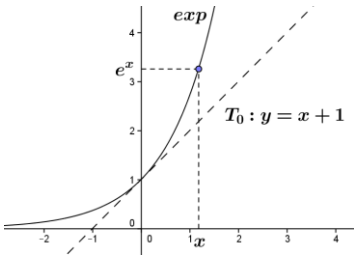
Conséquences : $a = b \Leftrightarrow e^a = e^b$. $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$. $a \le b \Leftrightarrow e^a \le e^b$.

Exemple : voir que $e^3 = e.e.e < e^{3,5} < e^4 = eeee$ …mais $e^{3,5}$ n'est pas une puissance.

Remarques : $e^0 = 1$ donc $1 \le e^x \Leftrightarrow 0 \le x$. $e^1 = e \approx 2{,}718$. $e^{-1} = 1/e \approx 0{,}37$ (moins important).

Si n est un entier ($n \ge 0$ ou $n \le 0$), alors $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$ (preuve par récurrence si $n \ge 0$).

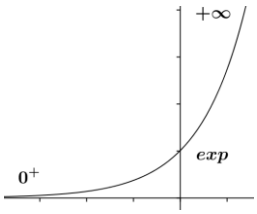
En étudiant (avec la dérivée) la fonction $g : x \mapsto e^x - (x+1)$, on prouve facilement que pour tout réel x, $e^x \ge x+1$ (graphiquement : $C_{\exp}$ est au dessus de sa tangente en 0).



On en déduit (avec le théorème de comparaison) : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(e^x\right) = +\infty$.

On a alors en posant $X = -x$: $\lim\limits_{X \to -\infty} \left(e^X\right) = 0\ (0^+)$.

Ces résultats se lisent sur le dessin $C_{\exp}$ (voir ci-dessous). Il faut retenir aussi les deux résultats suivants :



$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x}\right) = +\infty$ (évident sur un dessin) et $\lim\limits_{X \to -\infty} \left(X.e^X\right) = 0$ (pas évident).

A retenir car a priori ce sont des formes indéterminées.

En résumé : dans les deux cas, « l'exponentielle l'emporte sur le x ».

Dérivées : si u est dérivable, e^u l'est aussi et $\left(e^u\right)' = u'.e^u$, c'est-à-dire $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).e^{u(x)}$,

notamment si k est une constante : $\left(e^{kx}\right)' = k.e^{kx}$ et $\left(e^{kx^2}\right)' = 2kx.e^{kx^2}$ …et encore $\left(e^{-kx}\right)' = -k.e^{-kx}$.