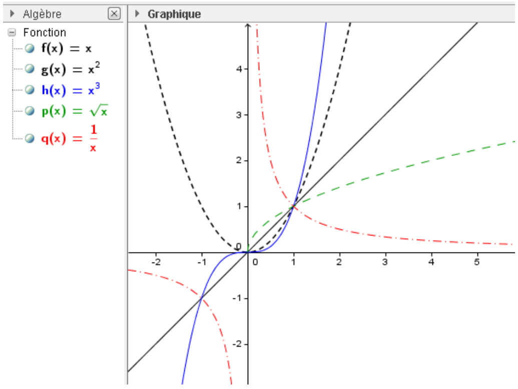
1) Limites « à l'infini »

a) **Fonctions de référence** (usuelles)



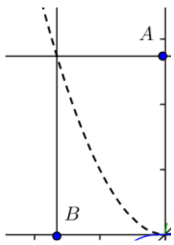
<u>Limite en $+\infty$</u> (« très loin à droite »)
Toutes ces fonctions ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$ à part la fonction inverse $i(x)=1/x$ qui a pour limite 0. Les définitions en $+\infty$ sont les mêmes que celles des suites.

<u>Limite en $-\infty$</u> (« très loin à gauche »)

Si $f(x)=$	x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$1/x$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$					

b) **Exemple de définition <u>en</u>** $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ signifie :



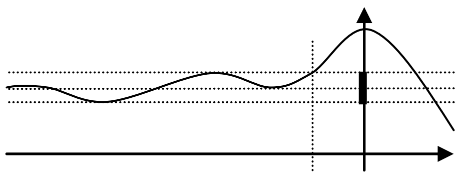
pour tout réel A (éventuellement très grand), il existe un réel B (éventuellement très « à gauche ») tel que : $x\le B \Rightarrow f(x)\ge A$.

On l'écrira parfois : $\lim\limits_{-\infty} f=+\infty$.

c) On peut aussi obtenir une **<u>limite finie L à l'infini</u>**, en $+\infty$ (déjà vu avec les suites) ou en $-\infty$:

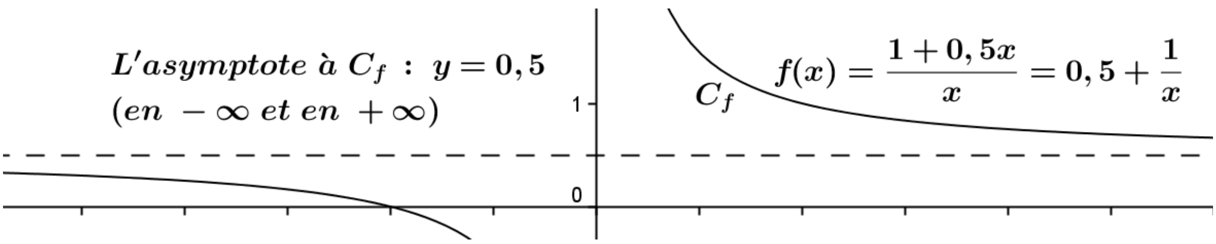
Ci-contre, $\lim\limits_{-\infty} f=L$:

pour tout intervalle ouvert I (éventuellement très petit) contenant L, il existe un réel B (éventuellement très « à gauche ») tel que : $x\le B \Rightarrow f(x)\in I$.



d) Définition

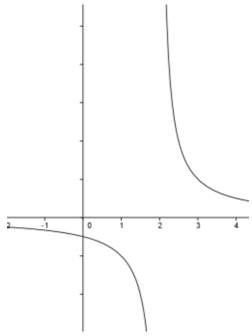
Quand on a une limite finie L en $+\infty$ ou en $-\infty$, on dit que la droite d'équation $y=L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f (et on précise : en $+\infty$ ou en $-\infty$). Exemple :



2) Limites en un point a

a) **Limites infinies**

En général on s'intéresse à la limite de f (x) quand x tend vers a lorsque f n'est pas définie en a. Exemple ci-contre a = 2 : $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.(c'est la fonction inverse mais « décalée », translatée, de 2 unités vers la droite). 2 n'a pas d'image par f.

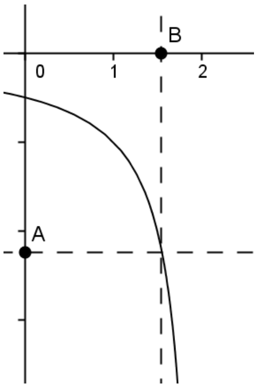


On voit que parler de la limite de f (x) quand x tend vers 2 n'a pas de sens mais en Terminale on se limite à une fonction définie sur un intervalle.

On étudie en fait deux fonctions : f sur $]-\infty\,;2[$ et f sur $]2;\ +\infty[$:

On se limite à $]-\infty\,;2[$. Pour tout A (éventuellement très bas), il existe un réel B (éventuellement très proche de 2) vérifiant :

$$B\le x<2 \Rightarrow f(x)<A$$

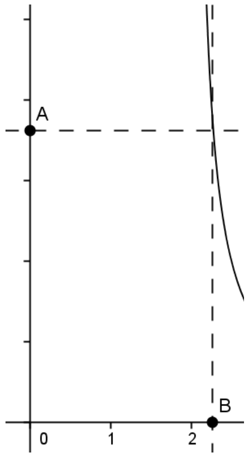


Sur $]-\infty\,;2[$, la limite de f en 2 est $-\infty$.

On l'écrit parfois $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ **(limite de f en 2 à gauche)**

On se limite à $]2;+\infty[$. Pour tout A (éventuellement très grand), il existe un réel B (éventuellement très proche de 2) vérifiant :

$$2<x\le B \Rightarrow f(x)>A.$$



Sur $]2;\ +\infty[$, la limite de f en 2 est $+\infty$.

On l'écrit parfois $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$. **(limite de f en 2 à droite)**

Dans les deux cas on dit que la droite d'équation $x=a$ (ci-dessus : $x=2$) est une **asymptote verticale** à la courbe représentant f.

Graphiquement ça signifie une grande proximité entre la courbe et l'asymptote (pour x proche de a), comme pour les asymptotes horizontales (pour x proche de $-\infty$ ou $+\infty$).

b) **Limites finies**

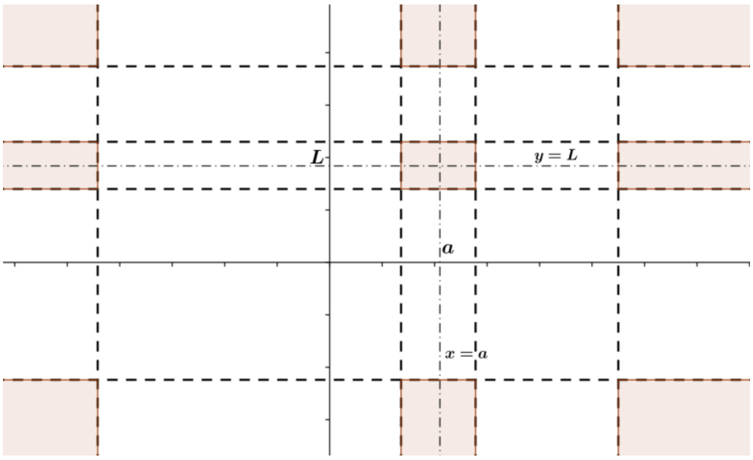
Banalement, pour les fonctions f qu'on connait, si f est définie en a, la limite de f quand x se rapproche de a est f(a). On dit alors que f est continue en a (pas de rupture de la courbe en a). Exemples : $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)=10$ ou $\lim\limits_{x\to 3}(\sqrt{x+4})=\sqrt{7}$. On croisera quelques exceptions.

Ces limites ont été rencontrées en classe de première : si $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ est un nombre réel L, on dit que f est dérivable en a et que L est la dérivée de f en a, notée $f'(a)$.

3) Résumé des définitions

Il y a 9 définitions différentes de
$\lim\limits_{x\to\alpha}\big(f(x)\big)=\beta \Leftrightarrow \lim\limits_{\alpha}\big(f\big)=\beta$:
$\alpha\in\{-\infty,a,+\infty\}$ et $\beta\in\{-\infty,L,+\infty\}$,
a et L réels. (penser à un arbre : 3*3=9)

Chacune dit que si on prend ci-contre une (ou deux) droite(s) horizontale(s), on peut obtenir une (ou deux) droite(s) verticale(s) de façon à « coincer » la représentation graphique de f dans un des 9 rectangles ci-contre. Noter que 8 de ces 9 rectangles ne sont pas bornés.



La traduction « si $x\approx\alpha$ alors $f(x)\approx\beta$ » de $\lim\limits_{\alpha}\big(f\big)=\beta$ est affreuse…mais parlante. Si on y ajoute « on peut avoir $f(x)\approx\beta$ aussi précis qu'on veut à condition de prendre $x\approx\alpha$ assez précis », on a « tout dit ».

4) Théorèmes sur les limites

a) **Opérations sur les fonctions** : on a les mêmes tableaux qu'avec les suites :

f et *g* sont des fonctions, *l* et L' sont des réels fixés et *a* désigne soit un réel fixé, soit + ∞, soit - ∞.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	*l*	*l*	*l*	+ ∞	- ∞	+ ∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	*l'*	+ ∞	- ∞	+ ∞	- ∞	- ∞
$\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x)$						

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	*l*	*l* > 0	*l* > 0	*l* < 0	*l* < 0	+ ∞	+ ∞	- ∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	*L'*	+ ∞	- ∞	+ ∞	- ∞	+ ∞	- ∞	- ∞	± ∞
$\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x)$									

Pour le quotient, on suppose de plus que *g* ne s'annule pas.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	*l*	*l*	+∞	+ ∞	− ∞	− ∞	± ∞
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	*L'* ≠ 0	± ∞	*L'* > 0	*L'* < 0	*L'* > 0	*L'* < 0	± ∞
$\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$							

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	*l* > 0 ou + ∞	*l* < 0 ou − ∞	*l* > 0 ou + ∞	*l* < 0 ou − ∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	0 et *g* > 0	0 et *g* > 0	0 et *g* < 0	0 et *g* < 0	0
$\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$					

Conséquence : les formes indéterminées nécessitant une transformation d'écriture pour conclure sont :

b) Divers

Certaines fonctions n'admettent pas de limite, par exemple cos n'a pas de limite en + ∞ (elle ne cesse d'osciller). Lorsqu'une limite existe, elle est unique. Les théorèmes vus pour les suites sont encore vrais pour les fonctions : comparaison et encadrements (gendarmes).
Il y a un théorème supplémentaire : la **limite d'une fonction composée :**

Théorème (admis**)** : on suppose f et g définies sur des intervalles assez grands.

α, β et γ sont des réels fixés ou un infini ($-\infty$ ou $+\infty$). Il y a $3^3 = 27$ cas possibles.

$$x \xrightarrow{f} f(x) = y \xrightarrow{g} g\left(f\left(x\right)\right)$$

$$\alpha \qquad\qquad \beta \qquad\qquad \gamma$$

si $\lim\limits_{\alpha}(f) = \beta$ et $\lim\limits_{\beta}(g) = \gamma$ alors $\lim\limits_{\alpha}(g(f)) = \gamma$.

On peut préférer l'énoncé : si $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)) = \beta$ et $\lim\limits_{y\to\beta}(g(y)) = \gamma$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha}(g(f(x))) = \gamma$.

En fait on a déjà utilisé ce théorème sans le dire (au 2) b)) ! Exemple avec $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3x}\right)$

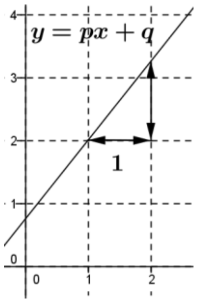
(noter que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2-3x}$ est définie sur $\left]-\infty; 0\right]$ donc s'intéresser à sa limite en - ∞ a un sens)

Ici, $f(x) = x^2 - 3x$, $g(y) = \sqrt{y}$, $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$ et $\gamma = +\infty$. On pose $y = x^2 - 3x$.

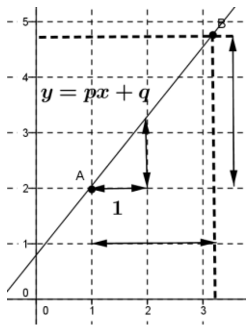
Schéma : $x \xrightarrow{f} x^2 - 3x = y \xrightarrow{racine} \sqrt{y} = \sqrt{x^2-3x}$. Rédaction : $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-3x) = +\infty \\ \lim\limits_{y\to+\infty}\sqrt{y} = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x} = +\infty$.

5) Rappels sur la dérivation

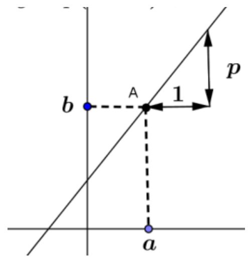
Rappels de seconde



p = « pente » = coefficient directeur de la droite



$p = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (Thalès)



Une équation : $y = p(x-a) + b$

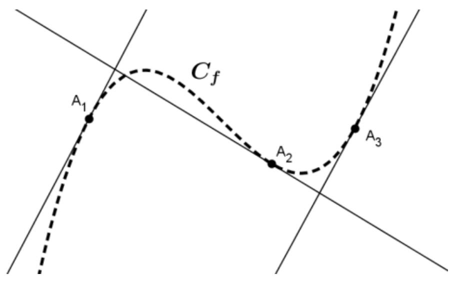
(coeff dir = p et passe par (a,b))

Par ailleurs :

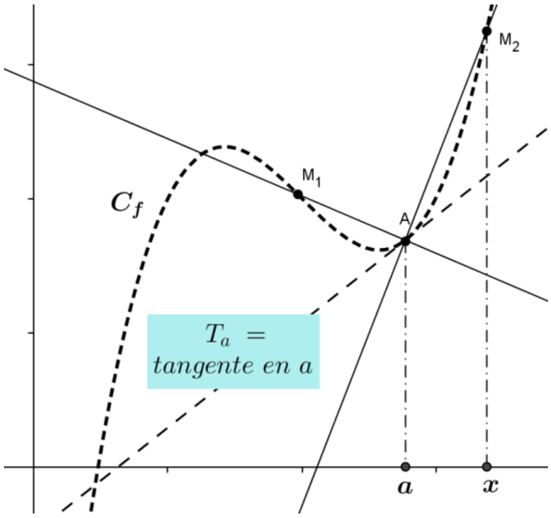
En tout point A fixé d'une courbe C_f « assez régulière », il existe une droite qui approxime localement (près de A) la courbe.

C'est la tangente à la courbe C_f en A.

Déterminons son équation (qui dépend bien sûr de f et A).



Soit $A(a; f(a))$ un point fixé de C_f.

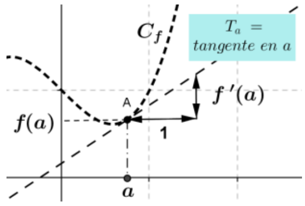


Soit $M(x; f(x))$ un point variable sur C_f. La tangente T_a à C_f en A est la position limite de la droite (AM) quand M tend vers A (se rapproche de A).

$x \to a$ $M \to A$ $(AM) \to T_a$	Le coefficient directeur de T_a est donc $\lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = L$ (si cette limite L existe).

On écrit parfois $L = \lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$.

Définition : si L existe et est un nombre fini, on dit que c'est le nombre dérivé de f en a (ou la dérivée de f en a) et on le note $f'(a)$. On dit alors que f est **dérivable** en a.



Puisque $f'(a)$ est le coefficient directeur de T_a qui passe par $A(a; f(a))$, une équation de T_a est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

Avec la machine :…

Déf Si f est dérivable en tout point a d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I et on peut définir sur I sa **fonction dérivée** notée f'. Avec la formule $f'(a) = \lim\limits_{x \to a}\left(\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ on obtient les dérivées des fonctions usuelles (à gauche) et les propriétés (à droite) : (dans la première formule, k est une constante.)

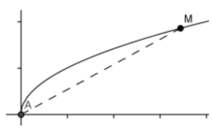
Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivation
$x \longmapsto k$,$k \in \mathbb{R}$	$x \longmapsto$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x$	$x \longmapsto$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^3$	$x \longmapsto$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n$,$n \in \mathbb{N}^*$	$x \longmapsto$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \frac{1}{x}$	$x \longmapsto$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \longmapsto \frac{1}{x^n}$,$n \in \mathbb{N}^*$	$x \longmapsto$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$x \longmapsto \sqrt{x}$	$x \longmapsto$	$]0;+\infty[$
$x \longmapsto \sin x$	$x \longmapsto$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos x$	$x \longmapsto$	$\mathbb{R}$

Opération	Fonction	Dérivée
Multiplication par un scalaire	ku	
Addition	$u+v$	
Multiplication	uv	
Inverse	$\frac{1}{u}$	
Quotient	$\frac{u}{v}$	

En notant que si n est un entier (relatif) et si $x \neq 0$, $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$ et par ailleurs si $x \geq 0$, $\sqrt{x}$ peut être noté $x^{\frac{1}{2}}$ (ce qui fait fonctionner la formule $(x^n)^p = x^{np}$ pour $n = 1/2$) et, de même, $1/\sqrt{x}$ peut être noté $x^{-\frac{1}{2}}$, on voit qu'à gauche la formule $(x^n)' = n\,x^{n-1}$ résume presque tout. On pourrait la démontrer (pour n entier) par récurrence…

Remarques : 1) En physique on écrit parfois df/dx au lieu de f '(x)…2) Limite de (sin x)/x en 0 :

3) La fonction racine $r : x \mapsto \sqrt{x}$ est définie mais pas dérivable en 0…



6) Autres formules de dérivation

Ces formules sont admises. Dans le tableau qui suit, u est une fonction dérivable.

fonction	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{u}$	$\frac{1}{u(x)}$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{u}$	$\sqrt{u(x)}$	x^n	u^n	$(u(x))^n$
dérivée	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{-u'}{u^2}$	$\frac{-u'(x)}{(u(x))^2}$						
conditions									

On peut donc énoncer la règle : quand on sait calculer $f\,'(x)$, pour calculer $(f(u(x)))'$, on remplace x par $u(x)$ dans $f\,'(x)$ puis on : $(f(u(x)))' = u'(x).\ f\,'(u(x))$.

Cas particulier : si a et b sont des nombres réels fixés, $(f(ax+b))' = a.f\,'(ax+b)$. Exercices :

Fonction	$\sqrt{3x+4}$	$(5x+1)^3$	$\sqrt{3x^2+7x-1}$	$(x^3+15x^2+4x)^5$
Dérivée				

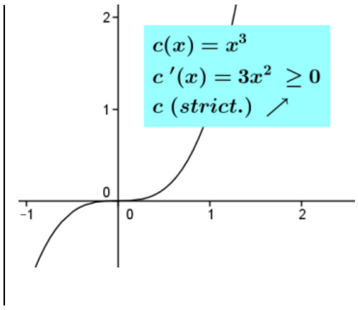
7) Sens de variations et signe de la dérivée (théorèmes)

Soit f dérivable sur un intervalle I.

On sait que f constante sur I $\Rightarrow$ f ' vaut 0 sur I. La réciproque est vraie : $f\,'=0$ (sur I) $\Rightarrow f$ constante.

$f\,'>0$ sur I $\Rightarrow f$ strictement ↗ sur I.

$f\,'<0$ sur I $\Rightarrow f$ strictement ↘ sur I.



Les deux derniers énoncés restent vrais si $f\,'$ s'annule en certains points isolés de I (pas sur un intervalle), voir l'exemple ci-contre : c' ne s'annule qu'en 0 et c strictement ↗ sur I = IR.

Il va de soi que pour déterminer le signe d'une dérivée on doit parfois (souvent) la FACTORISER.

Extrémums

Si f ' s'annule en changeant de signe en a, f présente un extrémum (local) en a.

x	a
f '(x)	0
f	

On a un maximum en a.

Le max de f est atteint en a.

f(a) est un maximum(local).

x	a
f '(x)	0
f	

On a un minimum en a.

Le min de f est atteint en a.

f(a) est un minimum(local).

Explication du mot « local »