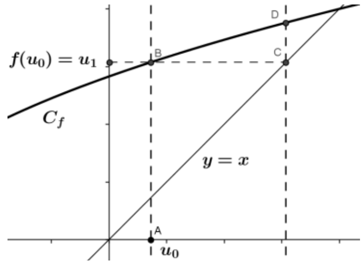
Résumé Suites numériques en Term S rajouter parfois : « à partir d'un certain rang » (rang 1 ou 2 etc…)

Raisonnement par récurrence (admis) :

$a \in IN$ fixé, P_s proposition dépendant de $s \in IN$

$$\left.\begin{array}{r} P_a \textit{ vraie} \\ \textit{Si } k \textit{ fixé}, k \geq a, P_k \textit{ vraie} \Rightarrow P_{k+1} \textit{ vraie} \end{array}\right\} \Rightarrow \textit{pour tout } n \geq a, P_n \textit{ est vraie.}$$

(séparer les 3 points : initialisation, hérédité et conclusion)



Il faut savoir tracer les premiers termes d'une suite définie par une relation du type u_0 fixé et $u_{n+1} = f(u_n)$ si $n \geq 0$.

Déf : (u_n) est une suite **croissante** ($(u_n) \nearrow$) si pour tout entier n, $u_{n+1} \geq u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$

« Idem » pour $(u_n) \searrow$. Noter que (c_n) définie par $c_n = (-1)^n$ n'est ni l'une ni l'autre (on dit : pas monotone).

Suite **géométrique** (u_n) de raison q (fixée !)

Déf : pour tout n, $u_{n+1} = u_n.q \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Ptés : $u_n = u_0\, q^n = u_1\, q^{n-1} \ldots (= u_k\, q^{n-k})$.

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \text{ (si } q \neq 1).$$

Suite **arithmétique** (v_n) de raison r (fixée !)

Déf : pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = r$.

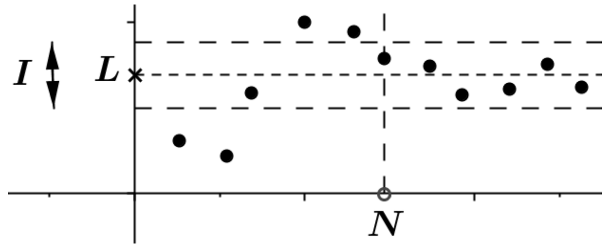
Ptés

$u_n = u_0 + n\,r = u_1 + (n-1)\,r \ldots (= u_k + (n-k)\,r)$.

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

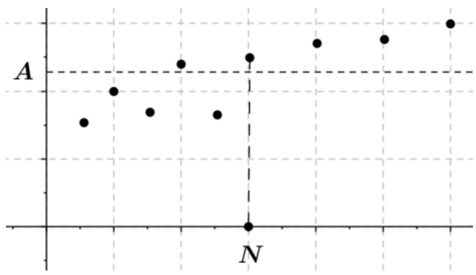
Déf La suite (u_n) **converge** (ou tend) vers un nombre fixé L (L est la limite de (u_n)) si pour tout intervalle ouvert I (éventuellement très petit) contenant L , il existe $N \in IN$ tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n \in I$.

On l'écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = L$ au bac et $u_n \to L$ ci-dessous.



Sinon (u_n) **diverge**, éventuellement vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ (ou ni l'un ni l'autre (« chaos ») comme $c_n = (-1)^n$).

Déf La suite (u_n) diverge (ou tend) vers $+\infty$ ($+\infty$ est la limite de (u_n)) si pour tout réel A (éventuellement très grand), il existe un entier N tel que : $n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$. On l'écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n) = +\infty$ au bac ($u_n \to +\infty$ ci-dessous).



Déf « identique »

avec lim = $-\infty$:

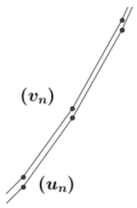
pour tout A,

$n \geq N \Rightarrow u_n \leq A$.

Indéterminations : $"(+\infty)+(-\infty), \infty * 0, \infty/\infty \text{ et } 0/0"$: mettre le terme dominant en facteur…

Th de comparaison (il y a « le même » avec limite $= -\infty$)

$$\left.\begin{array}{r} Si\ n \geq N, u_n \leq v_n \\ u_n \to +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow v_n \to +\infty$$

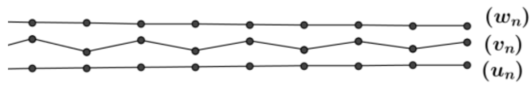


Dém : pour A donné, soit N' tel que $n \geq N' \Rightarrow u_n \geq A$.
Soit $N'' = Max(N, N')$.

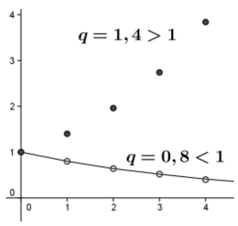
$n \geq N'' \Rightarrow ...$

Th des gendarmes $N \in IN$, $L \in IR$ fixés,

$$\left.\begin{array}{r} Si\ \ n \geq N,\ u_n \leq v_n \leq w_n \\ u_n \to L \\ w_n \to L \end{array}\right\} \Rightarrow v_n \to L$$



Théorème sur le comportement de (q^n) :



q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q \succ 1$
Suite (q^n)	dv	cv vers 0	cste=1	dv vers $+\infty$

Avec une suite arithmétique on aurait des points alignés.

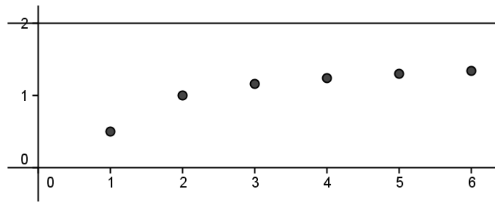
Déf (u_n) est **majorée** par M (fixé !) si pour tout n, $u_n \leq M$ (…**minorée** par m (fixé !) si pour tout n, $u_n \geq m$)

Déf Si (u_n) est minorée par m et majorée par M, on dit qu'elle est bornée (par m et M).

Th (admis donc essentiel !) :

$(u_n) \nearrow$ et majorée par $M \Rightarrow (u_n)$ converge vers $L \leq M$.

Ci-contre $M = 2$ et $L = 1{,}5$ car $u_n = 1{,}5 - \dfrac{1}{n}$.



Faire des dessins si nécessaire…

Th (admis donc…) :

$(u_n) \searrow$ et minorée par $m \Rightarrow (u_n)$ cv vers $L \geq m$.

Ci-contre $m = 0$ et $L = 0{,}5$ car $u_n = 0{,}5 + \dfrac{1}{n}$.