

Adrien Douady
John H. Hubbard
avec la collaboration de
Pierre Lavaurs, Tan Lei & Pierrette Sentenac

ÉTUDE DYNAMIQUE
DES POLYNÔMES COMPLEXES

DOCUMENTS MATHÉMATIQUES

Société Mathématique de France 2007

**ÉTUDE DYNAMIQUE
DES POLYNÔMES COMPLEXES**

Adrien Douady

John H. Hubbard

avec la collaboration de
Pierre Lavaurs, Tan Lei & Pierrette Sentenac

Documents Mathématiques
série dirigée par Pierre COLMEZ

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Documents Mathématiques
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2007

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 1629-4939

Directeur de la publication : Michel WALDSCHMIDT

DOCUMENTS MATHÉMATIQUES

ÉTUDE DYNAMIQUE
DES POLYNÔMES COMPLEXES

Adrien Douady

John H. Hubbard

avec la collaboration de
Pierre Lavaurs, Tan Lei & Pierrette Sentenac

Société Mathématique de France 2007

TABLE DES MATIÈRES

Préface	xi
I. Objet du cours	1
Résultats supposés connus	4
II. Compacts de \mathbb{C}	7
1. Chemins et arcs	7
2. Espaces compacts localement connexes	8
3. Le théorème de Carathéodory	8
4. Composantes de l'intérieur de K	9
5. Projection sur une composante	10
6. Arcs réglementaires	11
7. Arbres réglementaires	12
III. Connexité locale de certains ensembles de Julia	13
1. Ensemble de Julia	13
2. Représentation conforme de $\mathbb{C} \setminus K_f$ (cas où K_f est connexe)	15
3. Le lacet de Carathéodory	16
4. Applications expansives et sous-expansives	17
5. Connexité locale pour les polynômes sous-hyperboliques	19
6. Points périodiques	19
7. Caractérisation des polynômes hyperboliques ou sous-hyperboliques	21
IV. Arbres de Hubbard	25
1. Action sur $\pi_0(\hat{K}_f)$	25
2. Les centres des U_i	26
3. L'arbre de Hubbard	27
4. Cas du degré 2	29
V. Ensembles de Julia de mesure nulle	33
1. Distorsion	33
2. Densité	35
3. Le cas hyperbolique	36
4. Cas sous-hyperbolique : construction d'un revêtement	37

5. Cas sous-hyperbolique	38
VI. Posdronasvili	39
0. Notations et introduction	39
I - Partie combinatoire	40
1. L'arbre H^1	40
2. La structure complémentaire	40
3. Reconstitution de H^1 (degré $d \geq 3$)	41
4. Décoration des arbres	42
5. Construction d'homéomorphismes	43
6. Ajustement à l'infini	44
II - Partie Analytique	45
1. Rappel sur les applications quasi-conformes	45
2. Construction de Φ_0 et Φ_1	46
3. La suite (Φ_n)	47
4. Holomorphicité de Φ	47
5. Conclusion	48
VII. Arguments externes dans les ensembles de Julia	49
1. Rappels et introduction	49
2. Accès	49
3. Arbre augmenté	50
4. Calcul des arguments externes	53
VIII. Arguments externes dans M des points de Misurewicz	55
I - Représentation conforme de $\mathbb{C} \setminus M$	55
1. Potentiel des ensembles de Julia	55
2. Points critiques de G_f	57
3. La fonction Φ	57
II - Rayons externes des ensembles de Julia	58
1. Comportements possibles	58
2. Rayons externes d'argument rationnel	60
3. Une propriété de stabilité	62
III - Récolte dans le plan des paramètres	63
IX. Points fixes multiples et points périodiques indifférents rationnels	65
I - Points fixes multiples	65
1. Ordre d'un point fixe	65
2. Un changement de variables	66
3. Pétales	66
II - Cas des polynômes	68
1. Composante de $\overset{\circ}{K}_f$ contenant un pétale	68
2. Arguments externes de 0	71
III - Points périodiques indifférents rationnels	72

Nombre de pétales	72
X. Connexité locale de certains autres ensembles de Julia	75
1. Résultat	75
2. Constructions de Ω	76
3. Construction de \tilde{U}	76
4. Construction d'une métrique	77
5. Un module de continuité	78
6. La convergence	79
XI. Un tour de valse	81
par <i>Adrien Douady & Pierrette Sentenac</i>	
1. Introduction	81
2. Résultats	82
3. Un changement de variables	84
4. Valse des compacts	85
5. Étude de la famille (H_U)	87
6. Perturbation	88
7. Démonstration du théorème 1	90
8. Compléments	90
XII. Arriver à bon port	93
1. Introduction	93
2. Définition de $\omega(c, \gamma)$	95
3. Le cylindre de Fatou-Ecalle	95
4. Définition de $\check{\omega}(c)$	97
5. Cas de c_t	97
6. Définition de $\check{\omega}(c_0)$	98
7. Identification de $\check{\omega}(c_0)$	99
8. Démonstration du Théorème 1	100
XIII. Aboutissement des rayons externes de M d'argument rationnel	101
1. Résultats	101
2. Points d'accumulation de $\mathcal{R}(M, \theta)$	101
3. Démonstration du Théorème 1	102
XIV. Composantes hyperboliques	103
1. Composantes hyperboliques	103
2. Déformation d'un cycle indifférent rationnel, cas $q \neq 1$	104
3. Cas $q = 1$	105
4. Arbre de Hubbard en une racine	106
5. Racines des composantes hyperboliques; multiplicité	107
6. Décompte	108
XV. Ordre du contact des composantes hyperboliques de M	111
par <i>Tan Lei</i>	
1. Résumé des résultats déjà obtenus qui sont utiles pour la démonstration de cette proposition	111

2. Démonstration de la proposition	112
XVI. Identification de cylindres : étude à la limite	117
par <i>Pierre Lavaurs</i>	
1. Notations et position du problème	117
2. Continuité de la projection sur E	122
3. Le germe F	126
4. Comportement limite de $L(c)$	126
5. Étude de $L(c) \circ G(c)$ ($c \neq c_0$)	127
XVII. Une propriété de continuité	129
par <i>Pierre Lavaurs</i>	
1. Cassure des rayons d'argument rationnel	129
2. Énoncé et premiers cas	130
3. Cas des points de Misurewicz	130
4. Cas des points admettant un cycle indifférent rationnel	132
XVIII. Compléments sur les arbres	145
par <i>Pierre Lavaurs</i>	
1. Arbres aux centres et aux racines	145
2. Arbre en une bifurcation	148
3. Calcul des arguments externes dans M	149
XIX. Simplicité des composantes hyperboliques	153
XX. Nervures	155
1. Points extrémaux	155
2. Nervures de K	156
3. Nervures combinatoires	158
4. Ordre sur \mathcal{D}	159
XXI. Arbre de l'origine d'une nervure de M	161
1. Arbres de Hubbard abstraits	161
2. Résultats et notations	161
3. Rang d'un point de K	162
4. L'arbre Z_r	162
5. Le point y_1	163
6. L'arbre \check{H}	164
7. Condition de Hubbard pour \check{H}	165
8. Arguments externes de y_1	165
9. Démonstration du théorème	167
XXII. Adresses	169
1. Origine d'une nervure	169
2. Adresses finies	174
3. Point de séparation	174

4. L'implication $MLC \implies HG2$	176
XXIII. Ressemblance entre l'ensemble de Mandelbrot et l'ensemble de Julia au voisinage d'un point de Misurewicz	179
par <i>Tan Lei</i>	
1. Notation et énoncé. Introduction	179
2. Distance de Hausdorff	180
3. Le problème de la linéarisation	182
4. Une proposition technique	184
5. Convergence de $\rho(c_0)^n \tau_{-c_0}(M)$	187

PRÉFACE

Ce travail a pour but d'exposer des résultats obtenus par A. Douady et J.H. Hubbard en 1981-82. Les plus importants ont été énoncés, avec ou sans démonstration, dans [CRAS] et [Bbk].

Le présent texte est constitué par les notes rédigées chaque semaine par A.D. pour son cours « Systèmes dynamiques holomorphes » du 1er semestre 1983-84. On excusera les redites.

La terminologie est celle utilisée par A.D. Certains exposés, notamment « Tour de Valse » (2^e partie), ont été mis au point avec la participation de Pierrette Sentenac.

Ce texte est destiné à être repris dans un ouvrage plus complet. Nous pensons cependant utile de le proposer dans l'état actuel au lecteur.

Nous remercions le Groupe de Topologie d'Orsay qui a permis cette publication, et Bernadette Barbichon qui a assuré l'exécution de cette tâche avec compétence et gentillesse.

- Première partie : Exposés n°I à VIII
- Deuxième partie : Exposés n°IX et suivants, Appendices

Références

- [Bbk] A. DOUADY – « Systèmes dynamiques holomorphes », in *Séminaire Bourbaki*, Astérisque, vol. 105-106, Société Mathématique de France, 1983, p. 39–63.
- [CRAS] A. DOUADY & J.H. HUBBARD – « Itération des polynômes quadratiques complexes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **294** (1982), p. 123–126.

EXPOSÉ I

OBJET DU COURS

On étudiera la famille d'applications $P_c : z \mapsto z^2 + c$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} d'un point de vue dynamique. Pour chaque c , on note K_c l'ensemble des z tels que $P_c^n(z) \mapsto \infty$ (ensemble de Julia rempli de P_c). D'après un théorème de Fatou et Julia (1919), K_c est connexe si $0 \in K_c$ et est un Cantor sinon. On note M (ensemble de Mandelbrot) l'ensemble des c pour lesquels K_c est connexe, et M' l'ensemble des c pour lesquels P_c admet un cycle attractif. L'ensemble M est compact et connexe, M' est ouvert et contenu dans M .

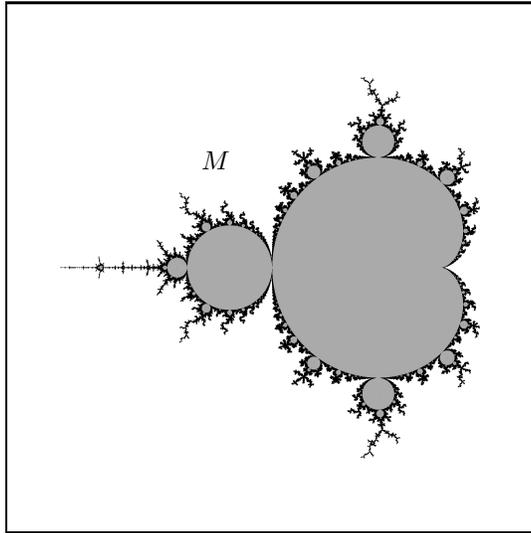


FIGURE 1. L'ensemble de Mandelbrot M .

Les deux principales conjectures sont les suivantes :

(MLC) L'ensemble M est localement connexe

(HG2) L'intérieur de M est M' .

À défaut de démontrer l'une ou l'autre, nous avons l'intention de montrer que (MLC) \Rightarrow (HG2).⁽¹⁾

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact plein (*i.e.* tel que $\mathbb{C} \setminus K$ soit connexe). Il existe un couple (r, φ) unique tel que $r \in \mathbb{R}_+$ et que $\varphi = \varphi_K$ soit un homéomorphisme \mathbb{C} -analytique de $\mathbb{C} \setminus K$ sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r$ avec $\varphi(z)/z \rightarrow 1$ quand $|z| \rightarrow \infty$. On dit que $r_K = r$ est le *rayon de capacité* de K . Pour $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, l'ensemble $\mathcal{R}(K, t) = \varphi_K^{-1}(\{\rho e^{2i\pi t}\}_{\rho > r})$ est appelé le *rayon externe* de K d'argument t (les arguments sont comptés en tours et non en radians). Si $\varphi_K^{-1}(\rho e^{2i\pi t})$ a une limite $x \in K$ quand $\rho \rightarrow r_K$, on dit que $\mathcal{R}(K, t)$ *aboutit* en x , ou que x admet t comme *argument externe* dans K . Si K est localement connexe, en vertu d'un théorème de Carathéodory, tout rayon externe aboutit.

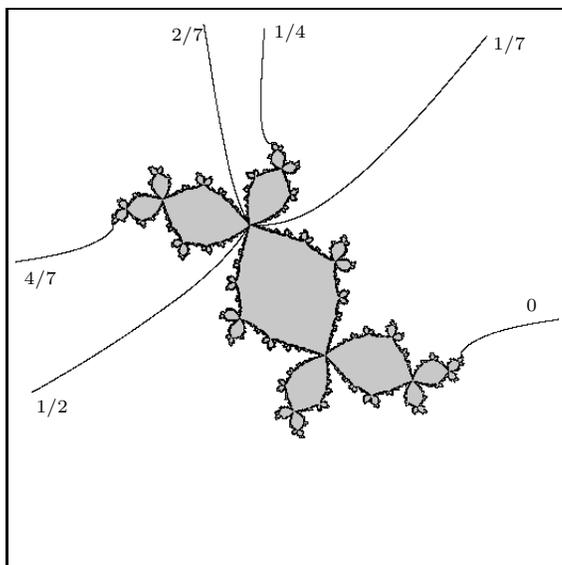


FIGURE 2. L'ensemble de Julia rempli d'un polynôme quadratique pour lequel le point critique est périodique de période 3. Nous avons tracé quelques rayons externes d'arguments rationnels. Cet ensemble de Julia rempli est connu sous le nom de *lapin de Douady*.

⁽¹⁾Yoccoz a démontré que l'ensemble de Mandelbrot est localement connexe en tout c tel que P_c a un point fixe indifférent. Il a également démontré que M est localement connexe en tout c tel que P_c n'est pas infiniment renormalisable. Graczyk et Swiatek et indépendamment Lyubich ont démontré que $\overset{\circ}{M} \cap \mathbb{R} = \overset{\circ}{M}' \cap \mathbb{R}$. Enfin, Mañé, Sad et Sullivan ont montré que s'il existe un $c \in \overset{\circ}{M} \setminus \overset{\circ}{M}'$, alors K_c est d'intérieur vide, de mesure de Lebesgue positive et supporte une forme de Beltrami invariante.

Fait très remarquable, on connaît φ_M , ainsi que les $\varphi_c = \varphi_{K_c}$ pour $c \in M$.⁽²⁾ Faute de (MLC), on ne sait pas que tout rayon externe de M aboutit. Cependant :

Théorème. — *Tout rayon externe de M d'argument rationnel aboutit.*

La situation se présente de façon différente pour les rationnels à dénominateur impair et les rationnels à dénominateur pair.

Si $t \in [0, 1]$ est un rationnel à dénominateur impair, le rayon externe $\mathcal{R}(M, t)$ aboutit en un point c tel que P_c admet un cycle indifférent rationnel. Chacun de ces points est obtenu pour 2 valeurs de t (sauf $c = 1/4$ correspondant à $t = 0$). Si t est à dénominateur pair, $\mathcal{R}(M, t)$ aboutit en un point c tel que, par P_c , le point 0 tombe en un temps fini sur un cycle répulsif. Ces valeurs de c sont appelées points de Misurewicz. Chaque point de Misurewicz a un nombre fini d'arguments externes (tous rationnels à dénominateur pair).

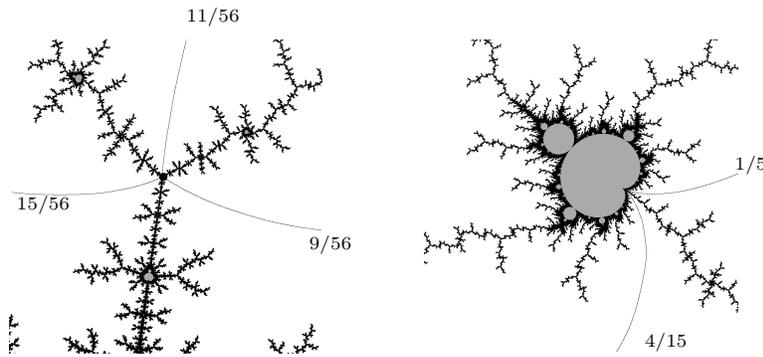


FIGURE 3. Deux agrandissements sur l'ensemble de Mandelbrot montrant le point d'aboutissement de rayons externes d'arguments rationnels à dénominateur pair à gauche et impair à droite.

Pour démontrer ces propriétés, on prend le problème par l'autre bout. On étudie d'abord les composantes hyperboliques de $\overset{\circ}{M}$, *i.e.* les composantes connexes de M' . On définit pour chacune d'elles son *centre* et sa *racine* : les centres (resp. les racines) des composantes hyperboliques sont les c tels que P_c ait un cycle superattractif (resp. un cycle indifférent rationnel). On étudie K_c pour c centre de composante hyperbolique ou point de Misurewicz. En particulier, on construit dans K_c un objet combinatoire : *l'arbre de Hubbard*. Grâce à cet arbre, on détermine les arguments externes de c si c est un point de Misurewicz, et, si c est le centre d'une composante hyperbolique W , les 2 arguments externes de la racine de W . La part d'analyse, assez facile dans le cas des

⁽²⁾Il est plus facile de calculer φ_M et φ_c que de calculer la représentation conforme du complémentaire d'un triangle

points de Misurewicz, est nettement plus délicate pour les racines des composantes hyperboliques (mais elle nous mènera à faire un tour de valse). Reste enfin à montrer que tous les arguments rationnels sont obtenus. Par un juste retour des choses, ceci est beaucoup plus facile pour les rationnels à dénominateur impair.

La méthode qui mène à l'implication (MLC) \Rightarrow (HG2) est la suivante : Soient c_1 et c_2 deux points de M ayant des arguments externes θ_1 et θ_2 de la forme $p/2^k$ (quand un point a un argument externe de cette forme, il n'a pas d'autre argument externe).

En supposant M localement connexe, construisons des arcs topologiques Γ_1 et Γ_2 joignant 0 à c_1 et c_2 respectivement (en fait, on impose à ces arcs certaines conditions — « arcs réglementaires »). Soit c_3 le point où Γ_1 et Γ_2 se séparent. On montre que c_3 est un point de Misurewicz ou un centre de composante hyperbolique, et on peut construire son arbre à partir de ceux de c_1 et c_2 .

Si c est centre d'une composante hyperbolique W , appelons argument externe généralisé de c tout argument externe d'un point de ∂W . Dans les deux cas, on montre que c_3 a au moins trois arguments externes (éventuellement généralisés) t_1, t_2, t_3 tels que $t_1 < \theta_1 < t_2 < \theta_2 < t_3$. Toute la partie combinatoire de cette étude peut se faire sans supposer M localement connexe — la définition de c_3 paraît alors artificielle.

Supposons maintenant que $\overset{\circ}{M}$ admette une composante farfelue (*i.e.* non hyperbolique) W . Soient w_1, w_2 et w_3 trois points de ∂W , et u_1, u_2 et u_3 des arguments externes de w_1, w_2, w_3 respectivement. Soient θ_1 et θ_2 de la forme $p/2^k$ tels que $u_1 < \theta_1 < u_2 < \theta_2 < u_3$, et notons c_1 et c_2 les points d'aboutissement de $\mathcal{R}(M, \theta_1)$ et $\mathcal{R}(M, \theta_2)$. Construisons alors c_3 et t_1, t_2, t_3 comme plus haut. Posons

$$S = W \cup \{w_1, w_2, w_3\} \cup \mathcal{R}(u_1) \cup \mathcal{R}(u_2) \cup \mathcal{R}(u_3) = W \cup \overline{\mathcal{R}}(u_1) \cup \overline{\mathcal{R}}(u_2) \cup \overline{\mathcal{R}}(u_3);$$

$S' = \mathcal{R}(t_1) \cup \mathcal{R}(t_2) \cup \mathcal{R}(t_3) \cup c_3$ si c_3 est de Misurewicz et $S' = \overline{\mathcal{R}}(t_1) \cup \overline{\mathcal{R}}(t_2) \cup \overline{\mathcal{R}}(t_3) \cup W'$ si c_3 est le centre de W' . Les ensembles S, S' et $\overline{\mathcal{R}}(\theta_1) \cup \overline{\mathcal{R}}(\theta_2)$ doivent être disjoints et cela mène à une contradiction.

Remarque. — Cette méthode ne permet pas d'exclure une composante farfelue dont l'adhérence rencontrerait celle de 2 rayons externes seulement. Cette situation risquerait de se produire si M n'était pas localement connexe.

Résultats supposés connus

Topologie

Théorème de Jordan. — $\Gamma \subset \mathbb{R}^2, \varphi : S^1 \rightarrow \Gamma$, homéomorphisme $\Rightarrow \exists \Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homéomorphisme, tel que $\Phi|_{S^1} = \varphi$.

Complément. — L'arc de a à b coupant Γ en un point c . On suppose qu'il existe un homéomorphisme ψ d'un voisinage U de c sur un voisinage V de 0 tel que $\psi(U \cap \Gamma) =$

$V \cap (\mathbb{R} \times 0)$ et $\psi(U \cap L) = V \cap (0 \times \mathbb{R})$. Alors, a et b sont chacun dans une des composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

On dit qu'un compact (resp. un ouvert borné) $A \subset \mathbb{R}^2$ est *plein* si $\mathbb{R}^2 \setminus A$ est connexe.

Proposition. — Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- U est plein ;
- pour toute courbe de Jordan $\Gamma \subset U$, le domaine de \mathbb{R}^2 borné par Γ est contenu dans U ;
- U est simplement connexe ;
- $H^1(U; \mathbb{Z}) = 0$;
- $H^1(U; \mathbb{Z}/2) = 0$; $H^1(U; \mathbb{R}) = 0$;
- U est homéomorphe à \mathbb{D} .

Proposition. — Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- K est plein ;
- K admet un système fondamental de voisinages homéomorphes à $\overline{\mathbb{D}}$;
- pour tout $a \in \mathbb{R}^2 \setminus K$, le revêtement universel (resp. le revêtement connexe de degré 2) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ induit un revêtement trivial de K ;
- tout revêtement fini de K est trivial.

Nous commencerons le cours par une étude plus détaillée des compacts connexes pleins localement connexes de \mathbb{R}^2 .

Fonctions holomorphes

Théorème d'uniformisation. — Toute surface de Riemann (i.e. variété \mathbb{C} -analytique de dimension 1 sur \mathbb{C}) simplement connexe est isomorphe à \mathbb{D} , \mathbb{C} ou $\Sigma = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Définition (métrique de Poincaré). — C'est la métrique définie sur \mathbb{D} par

$$\|dz\| = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Tout automorphisme de \mathbb{D} est de la forme $z \mapsto \lambda \frac{z + a}{1 + \bar{a}z}$ avec $|\lambda| = 1$, $|a| < 1$, et est une isométrie pour la métrique de Poincaré.

Si $X \approx \mathbb{D}$, on définit la métrique de Poincaré de X en transportant celle de \mathbb{D} . Si le revêtement universel \tilde{X} de X est isomorphe à \mathbb{D} , on définit la métrique de Poincaré de X par la condition que $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est une isométrie locale.

Soient X et Y deux surfaces de Riemann telles que $\tilde{X} \approx \tilde{Y} \approx \mathbb{D}$, et $f : X \rightarrow Y$ une application analytique. Alors, f est lipschitzienne de rapport 1 pour les métriques de Poincaré. On a $\|T_X f\| < 1$ pour tout $x \in X$ sauf si f est un revêtement. Si $f(X)$

est relativement compact dans Y , f est lipschitzienne de rapport < 1 sauf si Y est compact et f est un revêtement.

Théorème de Carathéodory. — Soit $U \subset S^2$ un ouvert isomorphe à \mathbb{D} et $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U$ un isomorphisme. Si ∂U est localement connexe, ψ admet un prolongement continu $\overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{U}$.

(En fait, nous donnerons une démonstration.)

Corollaire. — Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert borné simplement connexe et $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U$ un isomorphisme. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) ψ admet un prolongement continu $\overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{U}$;
- 2) ∂U est localement connexe ;
- 3) $\mathbb{C} \setminus U$ est localement connexe ;
- 4) $\exists L$ localement connexe, $\partial U \subset L \subset \mathbb{C} \setminus U$;
- 5) $\exists \gamma : \mathbb{T} \rightarrow \partial U$ surjective.

Théorème de Morrey-Ahlfors-Bers. — Nous aurons peut-être à l'utiliser. Nous l'énoncerons à ce moment-là.⁽³⁾

⁽³⁾La seule évocation de ce théorème a lieu dans le chapitre XIX, Lemme 3.

EXPOSÉ II

COMPACTS DE \mathbb{C}

1. Chemins et arcs

Soit X un espace topologique. Un *chemin* dans X est une application continue $\gamma : I = [0, 1] \rightarrow X$. Un *arc* dans X est un sous-espace de X homéomorphe à I , autrement dit l'image d'un chemin injectif. Il est d'usage de dire que X est *connexe par arcs* si deux points quelconques de X peuvent être joints par un chemin. Cette terminologie est excusée par la proposition suivante :

Proposition 1. — *Soient X un espace séparé, a et b deux points distincts de X . Si a et b peuvent être joints par un chemin dans X , ils peuvent aussi être joints par un arc.*

Principe de la démonstration. — Soit γ un chemin de a à b . Notons Ω l'ensemble des ouverts $W \subset \overset{\circ}{I} =]0, 1[$ tels que, pour toute composante connexe $] \alpha, \beta [$ de W , on ait $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

– Pour $W \in \Omega$, il existe un chemin γ_W unique qui coïncide avec γ sur $I \setminus W$ et est constant sur chaque composante connexe de W .

– Pour tout ouvert W de $\overset{\circ}{I}$ sans composante connexe adjacente, $W \neq \overset{\circ}{I}$, il existe une fonction croissante $\lambda : I \rightarrow I$, constante sur chaque composante connexe de W et vérifiant $\lambda(t) > \lambda(s)$ si $t > s$, et $]s, t[\not\subset W$. Si $W \in \Omega$, le chemin γ_W est de la forme $\tilde{\gamma}_W \circ \lambda$.

– Ω est inductif. Si $W \in \Omega$ est maximal, W n'a pas 2 composantes adjacentes et $W \neq \overset{\circ}{I}$.

– Pour W maximal, $\tilde{\gamma}_W$ est injectif.

2. Espaces compacts localement connexes

Soit X un espace métrique et $h : [0, a[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue croissante avec $h(0) = 0$. On dit que X admet h comme *module de connexité locale* si, pour x et y dans X tels que $d(x, y) = r < a$, il existe une partie connexe L de X contenant x et y , de diamètre $\leq h(r)$. Tout espace admettant un module de connexité locale est localement connexe. Tout espace métrique compact localement connexe X admet un module de connexité locale (défini sur tout \mathbb{R}_+ si X est connexe).

Un ordinateur ne peut pas dire si un espace métrique est localement connexe, mais il peut éventuellement répondre « non » à la question de savoir s'il admet une fonction donnée comme module de connexité locale.

Proposition 2. — *Tout espace métrique compact connexe localement connexe est connexe par arcs.*

Complément. — *Supposons que X admette h comme module de connexité locale, soient x et y deux points de X tels que $d(x, y) = r$ et $\eta > h(r)$. Il existe un arc joignant x à y de diamètre $\leq \eta$.*

Démonstration. — On peut supposer X plongé isométriquement dans un espace de Banach E , par exemple en prenant $E = \mathcal{C}(X : \mathbb{R})$ et $r(x) = (y \mapsto d(x, y))$. Un *chemin polygonal* γ à sommets dans X est un chemin $\gamma : I \rightarrow E$ muni d'un ensemble fini $S = \{s_0, \dots, s_n\} \subset I$ avec $s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_n = 1$, tel que $\gamma(s_i) \in X$, γ affine sur $[s_i, s_{i+1}]$. On dit que (γ', S') *raffine* (γ, S) si $S' \supset S$ et $\gamma'_{|S} = \gamma_{|S}$. Le *pas* de γ est $\sup d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1}))$.

Lemme. — *Soient $\gamma : I \rightarrow E$ un chemin polygonal de pas $\leq \delta$ à sommet dans X , et $\delta' > 0$. Il existe alors un chemin polygonal γ' à sommets dans X raffinant γ , de pas $\leq \delta'$, tel que $d(\gamma, \gamma') \leq h(\delta)$.*

Fin de la proposition avec son complément. — Soit (δ_n) une suite de nombres > 0 tendant vers 0 telle que $\Sigma h(\delta_n) < \eta - h(r)$. Soit γ_1 un chemin polygonal de x à y à sommets dans X de pas $\leq \delta_1$, de diamètre $\leq h(r)$, et construisons par récurrence une suite de chemin (γ_n) telle que γ_n de pas $\leq \delta_n$, $d(\gamma_n, \gamma_{n+1}) \leq h(\delta_n)$. Cette suite converge uniformément vers un chemin γ_∞ continu dans X de x à y , de diamètre $\leq h(r) + \varepsilon = \eta$. Dans l'image de γ_∞ , on peut trouver un arc Γ joignant x à y . Cqfd.

3. Le théorème de Carathéodory

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact connexe plein (*i.e.* tel que $\mathbb{C} \setminus K$ soit connexe). Il résulte du théorème d'uniformisation de Riemann qu'il existe un couple (r, φ) unique tel que φ soit un isomorphisme de surface de Riemann de $(\mathbb{C} \setminus K)$ sur $(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_r)$ tangent à l'identité en ∞ , *i.e.* tel que $\varphi(z)/z \rightarrow 1$ quand $|z| \rightarrow \infty$. Le nombre r est le *rayon de capacité* de K .

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus K$, $\log |\varphi(z)|$ est le *potentiel* de z et l'argument de $\varphi(z)$ est l'*argument externe* de z par rapport à K . Les arguments sont comptés en tours (et non en radians). L'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus K$ d'argument externe θ est le *rayon externe* $\mathcal{R}(K, \theta)$.

Théorème 1 (Carathéodory). — Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact connexe plein. On suppose qu'il existe un compact localement connexe L tel que $\partial K \subset L \subset K$. Alors, l'application $\psi = \varphi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r \rightarrow \mathbb{C} \setminus K$ admet un prolongement continu $\Psi : \mathbb{C} \setminus D_r \rightarrow \mathring{K}$.

Démonstration. — Pour $a \in \partial D_r$ et $\rho_0 < 2r$, on pose $U_{a, \rho_0} = D_{a, \rho_0} \cap \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r$. L'ouvert $\psi(U_{a, \rho_0})$ est borné, donc d'aire finie, égale à $\int_{\rho=0}^{\rho_0} A(\rho) d\rho$, où

$$A(\rho) = \int_{\theta=\theta_\rho^-}^{\theta_\rho^+} |\psi'(z(\rho, \theta))|^2 \rho d\theta = \frac{1}{\rho} \|\rho\psi'\|_\theta^2.$$

Posons $\Gamma_\rho = \partial D_{a, \rho} \cap \mathbb{C} \setminus \overline{D}_r$ et $\lambda(\rho)$ la longueur de $\psi(\Gamma_\rho)$. On a :

$$A(\rho) = \int_{\theta=\theta_\rho^-}^{\theta_\rho^+} |\psi'(z(\rho, \theta))| \rho d\theta = \langle \rho|\psi'|, 1 \rangle,$$

d'où $\lambda(\rho)^2 \leq \|\rho\psi'\|^2 \cdot \|1\|^2 = \rho A(\rho)(\theta_\rho^+ - \theta_\rho^-) \leq 2\pi\rho A(\rho)$.

Lemme. — Il existe une suite ρ_n tendant vers 0, telle que $\lambda(\rho_n)$ tende vers 0.

Démonstration. — $\int_0^{\rho_0} \frac{\lambda(\rho)^2}{2\pi\rho} d\rho \leq \int A(\rho) d\rho < \infty$. Cqfd.

Fin de la démonstration du théorème. — Soit h un module de connexité locale pour L . Soit $a \in \partial D_r$ et (ρ_n) comme dans le lemme ; posons $U_n = U_{a, \rho_n}$. La courbe (Γ_{ρ_n}) est de longueur finie, donc a 2 extrémités α_n et β_n dans ∂K , distantes de moins de $\lambda_n = \lambda(\rho_n)$. On peut joindre dans L les points α_n et β_n par un arc H_n de diamètre $\leq h(\lambda_n)$ et $\varphi(\gamma_n) \cup H_n$ est une courbe de Jordan J_n de diamètre $\leq \lambda_n + h(\lambda_n)$. L'ouvert $\psi(U_n)$ est contenu dans l'ouvert borné par J_n , donc a aussi un diamètre $\leq \lambda_n + h(\lambda_n)$. Il en résulte que les U_n convergent vers un point $\Psi(a)$. Pour $h \in \partial D_r$, avec $|b-a| \leq \rho_n$, on a $|\Psi(b) - \Psi(a)| \leq \lambda_n + h(\lambda_n)$, ce qui prouve la continuité de Ψ . Cqfd.

Remarque. — L'application Ψ induit une application surjective $\gamma_K : \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial K$ que nous appellerons le *lacet de Carathéodory*. Pour $x \in \partial K$, les éléments de $\gamma_K^{-1}(x)$ sont appelés les *arguments externes* de x .

4. Composantes de l'intérieur de K

Proposition 3. — Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact connexe plein localement connexe, et notons $(U_i)_{i \in I}$ la famille des composantes connexes de \mathring{K} .

- a) Pour tout i , \overline{U}_i est homéomorphe au disque fermé.
- b) $\text{diam } U_i \rightarrow 0$ (i.e. $\forall \varepsilon > 0$ l'ensemble des i tels que $\text{diam } U_i > \varepsilon$ est fini).

Démonstration

a) Si Γ est une courbe de Jordan dans U_i , le domaine limité par Γ est contenu dans K , donc dans U_i . Par suite, U_i est simplement connexe, donc isomorphe à \mathbb{D} ou \mathbb{C} . Comme U_i est borné, il est isomorphe à \mathbb{D} . Soit $\psi : \mathbb{D} \rightarrow U_i$ un isomorphisme. On a $\partial U_i \subset \partial K \subset \Sigma \setminus U_i$, et ∂K est localement connexe. Il résulte du théorème de Carathéodory (après inversion centrée en $\psi(0)$) que ψ se prolonge en $\Psi : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{U_i}$ continue. Reste à montrer que $\Psi|_{\partial\mathbb{D}}$ est injective.

α) *Partie analytique.* — $\forall x \in \partial U_i, \Psi^{-1}(x)$ est d'intérieur vide dans \mathbb{T} : ceci résulte du principe de réflexion de Schwarz.

β) *Partie topologique.* — $\forall x \in \partial U_i, \Psi^{-1}(x)$ est connexe. Supposons que non ; soient t_1, t_2, u_1, u_2 tels que u_1 et u_2 n'appartiennent pas à la même composante connexe de $\mathbb{T} \setminus \{t_1, t_2\}$, $\Psi(t_1) : \Psi(t_2) = x$, $\Psi(u_1) \neq x$, $\Psi(u_2) \neq x$. Soient A et B des arcs \mathcal{C}^1 d'extrémités (t_1, t_2) et (u_1, u_2) se coupant transversalement en un point. Alors, $\Psi(A)$ est une courbe de Jordan $\Gamma \subset K$, et $\Psi(B)$ la coupe transversalement en un point, donc l'un des points $\Psi(u_1), \Psi(u_2)$ est dans le domaine intérieur à Γ et l'autre dans le domaine extérieur. Mais, il ne peut y avoir de point de $\partial U_i \subset \partial K$ dans le domaine intérieur à Γ .

La partie a) résulte de α) et β).

b) Soient $n > 0$, h un module de connexité locale pour K et (U_{i_ν}) une suite de c.c. de $\overset{\circ}{K}$ telle que $\text{diam } U_{i_\nu} > m$. Dans chacun des U , soit (x_ν, y_ν) un couple de points tels que $|y_\nu - x_\nu| \geq m$. Quitte à extraire une suite, on peut supposer que $x_\nu \rightarrow x$ et $y_\nu \rightarrow y$. On a $x \in K, y \in K, |y - x| \geq m$. Soient A_1 et A_2 des voisinages connexes disjoints de x et y dans K , k tel que x_k et x_{k-1} soient dans A_1 y_k et y_{k+1} dans A_2 . Soient H_1 un arc de x_k à x_{k+1} dans A_1 , H_2 de y_k à y_{k+1} dans A_2 , J_1 de x_k à y_k dans U_{i_k} et J_2 de x_{k+1} à y_{k+1} dans $U_{i_{k+1}}$. On peut trouver une courbe de Jordan $\Gamma \subset H_1 \cup H_2 \cup J_1 \cup J_2$ avec $\Gamma \cap J_1$ et $\Gamma \cap J_2$ non vides. Alors, $\Gamma \subset K$, le domaine intérieur à Γ est contenu dans $\overset{\circ}{K}$, donc dans une composante connexe de $\overset{\circ}{K}$, et rencontre U_{i_k} et $U_{i_{k+1}}$, ce qui est absurde. Cqfd.

5. Projection sur une composante

Proposition 4 et Définition. — Soient $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact connexe plein localement connexe, U une composante connexe de $\overset{\circ}{K}$ et $x \in K$. Soient γ_1 et γ_2 deux chemins dans K , avec $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = x, \gamma_i(1) \in \overline{U}$; notons u_i le plus petit t tel que $\gamma_i(t) \in \overline{U}$. On a $\gamma_1(u_1) = \gamma_2(u_2)$. Ce point est appelé la projection de x sur \overline{U} et noté $\pi_U(x)$.

Démonstration. — Si $x \in \overline{U}$, on a $u_i = 0$ et $\gamma_i(u_i) \supset K$. On peut donc supposer $x \notin U_1$. Posons $y_i = \gamma_i(u_i)$ et supposons $y_1 \neq y_2$. L'ensemble $L = \gamma_1([0, u_1]) \cup \gamma_2([0, u_2])$ est un compact dans lequel y_1 et y_2 sont joints par un chemin, donc aussi

par un arc J , et on a $J \cap \overline{U} = L \cap \overline{U} = \{y_1, y_2\}$. En complétant avec un arc H de y_1 à y_2 dans \overline{U} , tel que $H \cap \partial U = \{y_1, y_2\}$, on obtient une courbe de Jordan Γ . Si z_1 et z_2 sont deux points de ∂U entrelacés avec (y_1, y_2) , l'un est dans le domaine V intérieur à Γ , mais $V \subset K$, d'où $V \subset \overset{\circ}{K}$ et comme $V \cap U \neq \emptyset$, on a $V \subset U$, d'où contradiction. Cqfd.

Corollaire. — Pour tout arc $\Gamma \subset K$, l'ensemble $\Gamma \cap \overline{U}$ est connexe.

Proposition 5. — Soient $K \subset \mathbb{R}^2$ un compact connexe plein localement connexe et U une composante connexe de $\overset{\circ}{K}$. La projection $\pi_U : K \rightarrow \overline{U}$ est continue, localement constante sur $K \setminus \overline{U}$.

Complément. — Soit h un module de connexité locale pour K . Alors, h est module de continuité pour π_U . Si $h(d(x, y)) < d(x, \overline{U})$, on a $\pi_U(x) = \pi_U(y)$.

Démonstration. — Soient x et $y \in K$, $\delta > h(|y - x|)$ et γ un chemin de x à y de diamètre $\leq \delta$. Si $\gamma([0, 1]) \cap \overline{U} \neq \emptyset$, soient u et v le plus petit et le plus grand t tels que $\gamma(t) \in \overline{U}$. On a $\pi(x) = \gamma(u)$, $\pi(y) = \gamma(v)$, et $d(\pi(x), \pi(y)) \leq \text{diam } \gamma([0, 1]) \leq \delta$. Si $\gamma([0, 1]) \cap \overline{U} = \emptyset$, en concaténant γ à un chemin de y à un point de \overline{U} on obtient un chemin de x à un point de \overline{U} , d'où $\pi(x) = \pi(y)$. Si $\delta < d(x, \overline{U})$, on est nécessairement dans ce dernier cas. Cqfd.

6. Arcs réglementaires

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact plein localement connexe; notons $(U_i)_{i \in I}$ la famille des composantes connexes de $\overset{\circ}{K}$. Choisissons dans chaque U_i un point w_i . Ceci détermine, à multiplication par un λ de module 1 près, un homéomorphisme $\varphi_i : \overline{U}_i \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ induisant un isomorphisme \mathbb{C} -analytique de U_i sur \mathbb{D} tel que $\varphi_i(w_i) = 0$.

Définition. — Nous appellerons arc réglementaire tout arc $\Gamma \subset K$ ayant la propriété suivante :

(AR) Pour tout $i \in I$, $\varphi_i(\Gamma \cap \overline{U}_i)$ est contenu dans la réunion de 2 rayons de $\overline{\mathbb{D}}$.

Proposition 6. — Soient x et y deux points distincts de K . Il existe un arc réglementaire unique Γ de x à y .

Démonstration

a) *Existence.* — Si x et y sont dans un même \overline{U}_i , cela est clair : si $\varphi_i(x)$ et $\varphi_i(y)$ ont même argument, $\varphi_i(\Gamma)$ est le segment $[x, y]$, sinon c'est $[x, 0] \cup [0, y]$.

En général, soit γ un chemin injectif de x à y . Rangeons les éléments i de I , tels que $\gamma^{-1}(\overline{U}_i)$ ait plus de 2 points, en une suite (i_n) , et notons γ_n le chemin obtenu en modifiant γ sur $\gamma^{-1}(\overline{U}_{i_1}), \dots, \gamma^{-1}(\overline{U}_{i_n})$ de façon à le rendre réglementaire sur ces intervalles. Il résulte de la proposition 3.(b) que les γ_n convergent uniformément vers un chemin γ^* . On vérifie que γ^* est injectif et que son image est un arc réglementaire.

b) *Unicité.* — Elle résulte du lemme suivant :

Lemme. — Soient Γ_1 et Γ_2 deux arcs réglémentaires. Alors, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ est connexe.

Démonstration du lemme. — Supposons que non, et soit $]u, v[_{\Gamma_1}$ une composante connexe de $\Gamma_1 \setminus (\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$. Alors, $[u, v]_{\Gamma_1} \cup [u, v]_{\Gamma_2}$ est une courbe de Jordan J . Soit V le domaine intérieur à J . Alors, $V \subset K$, donc $V \subset \overset{\circ}{K}$, donc $\exists i, V \subset U_i$ et $J \subset \overline{U}_i$. Les arcs $[u, v]_{\Gamma_1}$ et $[u, v]_{\Gamma_2}$ sont deux arcs réglémentaires distincts de u à v dans \overline{U}_i , ce qui est impossible. Cqfd.

Notation. — On note $[x, y]_K$ l'arc réglémentaire de x à y . Cette notation sous entend la donnée des w_i . Si $x = y$, on pose $[x, y] = \{x\}$.

Propriétés des arcs réglémentaires

- Tout sous-arc d'un arc réglémentaire est un arc réglémentaire.
- Soient x, y, z trois points de K . Alors $[x, y]_K \cap [y, z]_K$ est de la forme $[y, c]_K$ (lemme ci-dessus). On a :

$$[x, y]_K = [x, c]_K \cup [c, y]_K, \quad [y, z]_K = [y, c]_K \cup [c, z]_K, \quad [x, z]_K = [x, c]_K \cup [c, z]_K.$$

En particulier, si $[x, y]_K \cap [y, z]_K = \{y\}$, l'arc $[x, y]_K \cup [y, z]_K$ est réglémentaire. Nous noterons $c(x, y, z)$ le point ainsi défini.

7. Arbres réglémentaires

Nous dirons qu'une partie X de K est *réglementairement connexe* si, pour x et y dans X , on a $[x, y]_K \subset X$. Une réunion d'une famille de parties réglementairement connexes ayant un point en commun est réglementairement connexe. L'intersection d'une famille quelconque de parties réglementairement connexes est réglementairement connexe. On définit *l'enveloppe réglémentaire* $[A]$ d'une partie A de K comme l'intersection des parties réglementairement connexes contenant A .

Proposition 7. — Soient x_1, \dots, x_n des points de K . L'enveloppe réglémentaire $[x_1, \dots, x_n]$ de $\{x_1, \dots, x_n\}$ est un arbre topologique fini.

Démonstration. — Par récurrence sur n , c'est évident pour $n = 1$ ou 2 , ou pour $n = 3$. Supposons que $[x_1, \dots, x_n]$ soit un arbre topologique fini et soit $x_{n+1} \in K$. Soit a un point quelconque de $[x_1, \dots, x_n]$ et notons c le premier point de l'arc $[x_{n+1}, a]$ (en partant de x_{n+1}) qui appartienne à $[x_1, \dots, x_n]$. Alors

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = [x_1, \dots, x_n] \cup [c, x_{n+1}] \quad \text{et} \quad [x_1, \dots, x_n] \cap [c, x_{n+1}] = \{c\}.$$

Remarques

- 1) Toute extrémité de $[x_1, \dots, x_n]$ est l'un des x_i , mais il peut y avoir des x_i qui ne sont pas des extrémités.
- 2) On pourrait définir des arcs géodésiques. Mais la proposition 7 ne marcherait pas.

EXPOSÉ III

CONNEXITÉ LOCALE DE CERTAINS ENSEMBLES DE JULIA

1. Ensemble de Julia

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme de degré $d > 1$. On appelle *ensemble de Julia rempli* de f l'ensemble K_f des z tels que $f^n(z) \not\rightarrow \infty$. C'est un compact. En effet, soit $f_i : z \mapsto a_d z^d + \dots + a_0$, posons

$$R^* = \sup \left(1, \frac{1 + |a_{d-1}| + \dots + |a_0|}{|a_d|} \right).$$

Pour $|z| > R^*$, on a $|f(z)| \geq |z|^d / R^*$. Par suite, $K_f = \bigcap f^{-n}(\overline{D}_{R^*})$.

Posons $J_f = \partial(K_f)$; c'est l'*ensemble de Julia*.

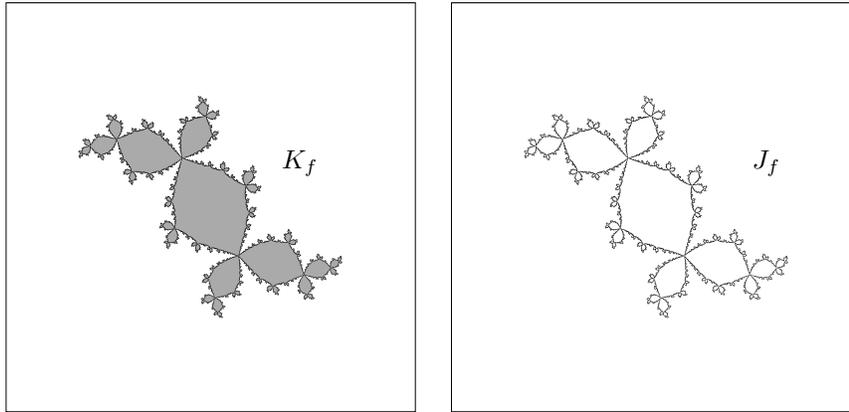


FIGURE 1. L'ensemble de Julia rempli et l'ensemble de Julia d'un polynôme quadratique. Le point critique 0 (au centre de la fenêtre) appartient à l'ensemble de Julia rempli qui est connexe.

Nous étudions particulièrement la famille $(f_c)_{c \in \mathbb{C}}$ définie par $f_c(z) = z^2 + c$. Tout polynôme de degré 2 est conjugué par une application affine unique à un f_c unique. Par exemple $z \mapsto z^2 + \lambda z$ est conjugué à f_c pour $c = \lambda/2 - \lambda^2/4$. On note K_c l'ensemble de Julia rempli de f_c .

Proposition 1 (Julia, Fatou)

- a) Si $0 \in K_c$, l'ensemble K_c est connexe.
 b) Si $0 \notin K_c$, l'ensemble K_c est homéomorphe à l'ensemble de Cantor.

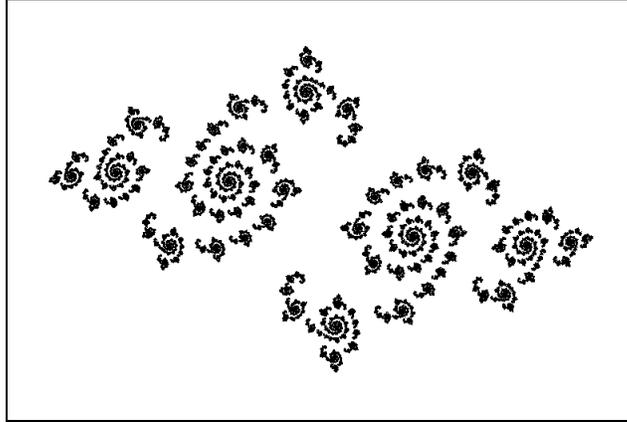


FIGURE 2. L'ensemble de Julia d'un polynôme quadratique. Le point critique 0 (au centre de la fenêtre) n'appartient pas à l'ensemble de Julia rempli qui est un Cantor.

Démonstration. — Choisissons $R > 1 + |c|$ et posons $V_n = (f^n)^{-1}(D_R)$ pour tout n . On a $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ et $K_c = \bigcap V_n$.

a) Pour tout n , l'ensemble V_{n+1} est un revêtement de V_n de degré 2 ramifié en 1 point, V_0 est un disque, donc V_n est homéomorphe à un disque pour tout n , et $K_c = \bigcap \overline{V_n}$ est connexe.

b) Il existe un m tel que $0 \in V_m$ et $c = f_c(0) \notin V_m$. Alors, V_m est homéomorphe à un disque, mais pour tout $n \geq m$ l'espace V_{n+1} est un revêtement de degré 2, non ramifié, de V_n . Par suite, pour tout k , l'ouvert V_{m+k} a 2^k composantes connexes homéomorphes au disque. Notons δ_k le maximum des diamètres de ces composantes connexes pour la métrique de Poincaré μ de V_m . L'application $f_c : V_{m+1} \rightarrow V_m$ admet deux sections g_0 et g_1 lipschitziennes de rapport $\lambda < 1$ pour μ , d'où $\delta_k \leq \lambda^{k-1} \delta_1$. En particulier, $\delta_k \rightarrow 0$, d'où b). Cqfd.

Pour un polynôme f de degré $d > 2$, il y a en général plusieurs points critiques, d'où plus de possibilités. Si tous les points critiques appartiennent à K_f , l'ensemble K_f est connexe. Si aucun point critique n'appartient à K_f , l'ensemble K_f est un Cantor. S'il y a au moins un point critique hors de K_f (et éventuellement d'autres dans

K_f), l'ensemble K_f a une infinité non dénombrable de composantes connexes, mais certaines peuvent n'être pas réduites à un point. La démonstration est analogue.⁽¹⁾

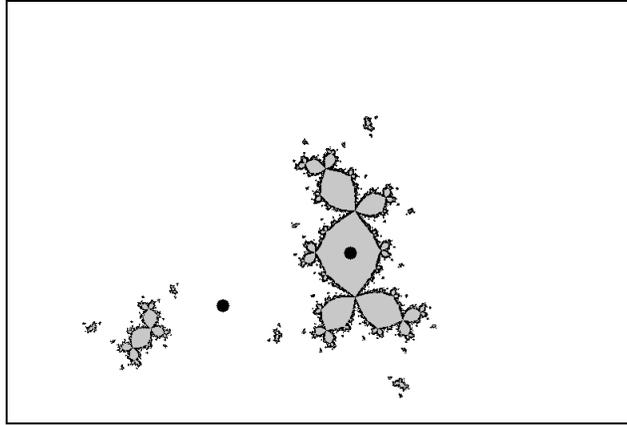


FIGURE 3. L'ensemble de Julia rempli d'un polynôme cubique dont un point critique a une orbite bornée et l'autre point critique a une orbite non bornée. Les deux points critiques sont indiqués.

Pour tout polynôme f , le compact K_f est plein : cela résulte du principe du maximum. On a $f(K_f) = f^{-1}(K_f) = K_f$. L'application f induit une application holomorphe (donc ouverte) et propre de $\overset{\circ}{K}_f$ dans $\overset{\circ}{K}_f$. Par suite, pour toute composante connexe U de $\overset{\circ}{K}_f$, son image $f(U)$ est une composante connexe de $\overset{\circ}{K}_f$ et f induit une application propre de U sur $f(U)$.

Il y a des polynômes pour lesquels K_f est localement connexe et d'autres (même en degré 2) pour lesquels il est connexe mais non localement connexe.⁽²⁾ Le but de ce chapitre est de donner des conditions suffisantes pour que K_f soit localement connexe.

2. Représentation conforme de $\mathbb{C} \setminus K_f$ (cas où K_f est connexe)

Proposition 2. — Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme de degré $d \geq 2$. On suppose K_f connexe. Alors, le rayon de capacité de K_f est 1, et la représentation conforme $\varphi : \mathbb{C} \setminus K_f \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, tangente à l'identité en ∞ , conjugue f à $z \mapsto z^d$.

⁽¹⁾Branner et Hubbard ont démontré que dans le cas d'un polynôme cubique f , soit K_f est connexe, soit K_f est un ensemble de Cantor (ceci peut se produire même si un des points critiques a une orbite bornée), soit une composante connexe de K_f est périodique et homéomorphe à l'ensemble de Julia rempli d'un polynôme quadratique, les autres composantes connexes de K_f non réduites à un point étant des préimages de cette composante.

⁽²⁾C'est le cas par exemple si f a un point fixe (ou périodique) indifférent irrationnel non linéarisable.

Démonstration. — Soit R le rayon de capacité de K_f ; posons $r = 1/R$, $\Phi(z) = 1/\varphi(z)$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus K_f$, et définissons $g : D_r \rightarrow D_r$ par $g = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ sur $D_r \setminus \{0\}$ et $g(0) = 0$. L'application g est holomorphe avec un zéro d'ordre d en 0, elle est donc de la forme $z \mapsto uz^d$, et u ne s'annule pas sur D_r . D'autre part, g est propre, donc $|u(z)|$ tend vers $1/r^{d-1}$ quand $|z| \rightarrow r$; par suite, u est constante. Comme f est monique et φ tangente à l'identité en ∞ , on a $u(0) = 1$, d'où $u(z) = 1$ pour tout z , $r = 1$, $g(z) = z^d$ pour $z \in \mathbb{D}$ et $\varphi(f(\varphi^{-1}(z))) = z^d$ pour $|z| > 1$. Cqfd.

Remarques

1) Supposons que $0 \in K_f$, soit $z \in \mathbb{C} \setminus K_f$ et posons $z_n = f^n(z)$. Il résulte de l'équation fonctionnelle $\varphi(z_{n+1}) = (\varphi(z_n))^d$ que φ est donnée par le produit infini

$$\varphi(z) = z \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{a_{d-1}}{z_n} + \cdots + \frac{a_0}{z_n^d} \right)^{1/d^{n+1}} \quad \text{notations du n}^\circ 1.$$

L'ambiguïté due à l'exposant fractionnaire est levée de la façon suivante : pour n tel que $|z_n| > R^*$, prendre la détermination principale de $(1 + \zeta)^{1/d^{n+1}}$ sur \mathbb{D} . D'autre part, chaque facteur, comme fonction de z , admet une unique détermination continue tendant vers 1 quand $z \rightarrow \infty$. Ce produit infini converge avec une rapidité fantastique à partir du moment où $|z_n| > R^*$.

2) Dans la démonstration (et même dans l'énoncé) de la proposition 2, nous supposons connu le théorème de Riemann d'existence de la représentation conforme. On n'en a pas vraiment besoin, puisqu'on peut le construire effectivement.

3. Le lacet de Carathéodory

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme monique de degré $d \geq 2$ tel que K_f soit connexe. Si K_f est localement connexe, la représentation conforme $\psi = \varphi^{-1} : \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C} \setminus K_f$ tangente à l'identité en ∞ admet un prolongement continu à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ (théorème de Carathéodory), d'où une application continue surjective $\gamma : \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial K$ définie par $t \mapsto \psi(e^{2i\pi t})$: c'est le *lacet de Carathéodory* de K_f (ou de f). Nous allons donner un procédé pour construire le lacet de Carathéodory, procédé qui converge *si et seulement si* K_f est localement connexe. Par la suite, on utilisera la convergence de ce procédé comme critère pour savoir si K_f est localement connexe.

Considérons le rayon externe $\mathcal{R}(K_f, 0)$ d'argument 0. Soit $\gamma_0 : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet tel que $\gamma(\mathbb{T}) \subset \mathbb{C} \setminus K_f$, $\gamma_0(0) \in \mathcal{R}(K_f, 0)$, γ_0 d'indice 1 par rapport à un point (donc à tout point) de K_f .

Proposition 3

a) On peut définir par récurrence une suite (γ_n) de lacets $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ par les conditions $f(\gamma_{n+1}(t)) = \gamma_n(d \cdot t)$, $\gamma_{n+1}(0) \in \mathcal{R}(K_f, 0)$.

b) Pour que K_f soit localement connexe, il faut et il suffit que la suite (γ_n) soit uniformément convergente.

c) Si K_f est localement connexe, $\lim(\gamma_n)$ est le lacet de Carathéodory de K_f .

Démonstration

(a) L'application $\varphi \circ \gamma_0$ est de la forme $t \mapsto \rho(t)e^{2i\pi\theta(t)}$, où $\rho : \mathbb{T} \rightarrow]1, +\infty[$ et $\theta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ sont continues, avec θ de degré 1 et $\theta(0) = 0$. L'application θ se relève en $\tilde{\theta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue avec $\tilde{\theta}(0) = 0$ et $\tilde{\theta}(t+1) = \tilde{\theta}(t) + 1$. Alors, γ_n est donné par $t \mapsto \varphi^{-1}(\rho_n(t)e^{2i\pi\theta_n(t)})$, où $\rho_n(t) = \rho(t)^{1/2^n}$ et $\theta_n : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ provient de $\tilde{\theta}_n : t \mapsto \frac{1}{2^n}\tilde{\theta}(2^n t)$.

(b - il faut) et (c) Uniformément sur \mathbb{T} , $\rho_n \rightarrow 1$ et $\theta_n \rightarrow \text{id}$. Si K_f est localement connexe, $\psi = \varphi^{-1}$ admet un prolongement continu à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, donc γ_n converge uniformément vers $t \mapsto \psi(e^{2i\pi t})$.

(b - il suffit) Supposons que les γ_n convergent uniformément vers un lacet $\gamma_\infty : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$, et montrons que $\gamma_\infty(\mathbb{T}) = \partial K_f$. Tout compact de $\Sigma \setminus \overline{\mathbb{D}}$ est contenu dans un $\Sigma \setminus D_{1+\varepsilon}$, donc tout compact de $\Sigma \setminus K_f$ est contenu dans un $\varphi^{-1}(\Sigma \setminus D_{1+\varepsilon})$. Comme $\rho_n \rightarrow 1$ uniformément, pour tout voisinage V de K_f , on a $\gamma_n(\mathbb{T}) \subset V$ pour n assez grand. Il en résulte que $\gamma_\infty(\mathbb{T}) \subset \partial K_f$.

Soit $x \in K_f$ et $y \in \mathbb{C} \setminus K_f$ un point voisin de x . Soit L un chemin dans $\Sigma \setminus K_f$ joignant y à ∞ . Pour n assez grand, $\gamma_n(\mathbb{T}) \cap L = \emptyset$, donc γ_n est d'indice 0 par rapport à y . Comme il est d'indice 1 par rapport à x , $\gamma_n(\mathbb{T})$ coupe le segment $[x, y]$, et il existe un t_n tel que $\gamma_n(t_n) \in [x, y]$, d'où $|\gamma_n(t_n) - x| < |y - x|$. Ceci ayant lieu pour tout y , on peut trouver une suite (n_k) et une suite $(s_k = t_{n_k})$ telle que $\gamma_{n_k}(s_k) \rightarrow x$. Quitte à extraire une suite, on peut supposer que (s_k) a une limite s , alors $\gamma_\infty(s) = x$.

Ceci montre que $\gamma_\infty(\mathbb{T}) = \partial K_f$. Comme l'image d'un compact localement connexe par une application continue est localement connexe, ∂K_f est localement connexe, et il en résulte que K_f est localement connexe. Cqfd.

4. Applications expansives et sous-expansives

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Une *métrique riemannienne* (compatible avec la structure complexe) sur Ω est la donnée pour tout point $z \in \Omega$ d'une norme sur $T_z(\Omega) = \mathbb{C}$; cette norme est nécessairement de la forme $t \mapsto \|t\| = u(z)|dz|$ où u est une fonction sur Ω à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . On écrira $\|dz\| = u(z)|dz|$. Si u est continue (resp. ...) on dira que c'est une métrique riemannienne à coefficients continus (resp. ...). Si Ω est muni de la métrique riemannienne définie par une fonction continue u , on définit la longueur $\ell_u(\gamma)$ d'un chemin γ de classe C^1 par $\ell_u(\gamma) = \int_0^1 \|d(\gamma(t))\| = \int_0^1 u(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$. La *distance* $d_u(x, y)$ pour x et y dans Ω est la borne inférieure des longueurs des chemins de x à y . Soit $f : \Omega \rightarrow \Omega_1$ une application holomorphe, où Ω et Ω_1 sont des ouverts de \mathbb{C} munis de métriques riemanniennes définies par u et u_1 respectivement. Pour

$x \in \Omega$, la norme de $T_x f : T_x \Omega \rightarrow T_{f(x)} \Omega_1$ (chacun de ces deux espaces étant muni de sa norme) est :

$$\|T_x f\| = \frac{u_1(f(x))}{u(x)} |f'(x)|.$$

Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe et Λ une partie de Ω telle que $f(\Lambda) \subset \Lambda$. Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. On dit que f est *fortement dilatante* sur Λ pour la métrique riemannienne définie par u si

$$(FD) \quad (\exists \lambda > 1) (\forall x \in \Lambda) \quad \|T_x f\| \geq \lambda.$$

Si Λ est compact et u continue, il suffit que

$$(\forall x \in \Lambda) \quad \|T_x f\| > 1.$$

Définition. — On dit que f est *expansive* sur Λ s'il existe un voisinage V de Λ dans Ω et une fonction continue $u : V \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que f soit fortement dilatante pour la métrique riemannienne définie par u .

Exercice. — Si Λ est compact, les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est expansive sur Λ .
- (ii) $(\exists \lambda > 1)$, $(\exists c > 0)$, $(\forall x \in \Lambda)$, $(\forall n \in \mathbb{N})$, $|(f^n)'(x)| \geq c\lambda^n$.
- (iii) $(\forall x \in \Lambda)$, $(\exists n \in \mathbb{N})$, $|(f^n)'(x)| > 1$.

Remarque terminologique. — Je devrais peut-être dire « fortement expansive », certains auteurs donnant à « expansive » un sens plus faible. L'anglais permet de faire une nuance entre « expansive » et « expanding ».

Nous allons montrer que, si un polynôme f est expansif sur son ensemble de Julia J_f , le compact K_f est localement connexe (et J_f aussi). Mais ceci est vrai sous des hypothèses plus faibles. Pour les formules, nous allons introduire la notion d'application sous-expansive.

Nous appellerons métrique riemannienne *admissible* sur Ω une métrique $\|dz\| = u(z)|dz|$ où u est définie continue et strictement positive sur $\Omega \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, avec au voisinage de chacun des a_i une inégalité $m_i \leq u(z) \leq c_i/|z - a_i|^{\beta_i}$ avec $m_i > 0$, $0 < \beta_i < 1$, $c_i < \infty$.

Une métrique admissible permet de définir une longueur finie pour tout arc \mathbb{R} -analytique par morceaux, et une distance qui définit la même topologie que la métrique ordinaire (avec $m_i|z - a_i| \leq d(a_i, z) \leq c_i|z - a_i|^{1-\beta_i}/(1 - \beta_i)$). On dit que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est fortement dilatante sur Λ si chacun des $f(a_i)$ est l'un des a_j , et s'il existe un voisinage V de Λ et un $\lambda > 1$ tels que :

$$(\forall x \in V \setminus (\{a_i\}_i \cup f^{-1}(\{a_i\}_i)), \quad (\|T_x f\| \geq \lambda).$$

Définition. — Soit $\Lambda \subset \Omega$ un compact tel que $f(\Lambda) \subset \Lambda$. Nous dirons que f est *sous-expansive* sur Λ s'il existe un voisinage V de Λ dans Ω et une métrique riemannienne admissible sur V pour laquelle f soit fortement dilatante sur Λ .

5. Connexité locale pour les polynômes sous-hyperboliques

Définition. — Soit f un polynôme. On dit que f est hyperbolique (resp. sous-hyperbolique) si f est expansif (resp. sous-expansif) sur son ensemble de Julia J_f .

Proposition 4. — Soit f un polynôme tel que K_f soit connexe. Si f est sous-hyperbolique, K_f est localement connexe.

Démonstration. — Nous allons montrer que la suite (γ_n) définie au n°3 converge uniformément. Soient V un voisinage de J_f sur lequel il existe une métrique admissible μ pour laquelle f est fortement dilatante, V_1 un voisinage connexe de J_f relativement compact dans V . Pour n assez grand (disons $n \geq N$), on a $\gamma_n(\mathbb{T}) \subset V_1$, et γ_n et γ_{n+1} sont homotopes dans $V_1 \setminus J_f$. Notons \mathcal{E} l'ensemble des lacets $\eta : \mathbb{T} \rightarrow \overline{V_1}$ et \mathcal{F} l'ensemble des lacets $\eta : \mathbb{T} \rightarrow V_1 \setminus J_f$, homotopes aux γ_n pour $n \geq N$, et tels que $\eta(0) \in \mathcal{R}(K_f, 0)$. Munissons V de la distance définie par μ , $\overline{V_1}$ de la distance induite, \mathcal{E} de la distance de la convergence uniforme pour cette distance, et \mathcal{F} de la distance suivante :

$$d(\eta, \eta') = \inf_{\substack{h \text{ homotopie} \\ \text{de } \eta \text{ à } \eta' \\ h(s,0) \in \mathcal{R}(K_f,0)}} \sup_{t \in \mathbb{T}} \ell_\mu(s \mapsto h(s, t)).$$

On peut supposer que $\varphi(V_1 \setminus K_f)$ est une couronne. On a, pour $n \geq N$,

$$d_{\mathcal{F}}(\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}) \leq \frac{1}{\lambda} d_{\mathcal{F}}(\gamma_n, \gamma_{n+1}). \quad \text{Cqfd.}$$

6. Points périodiques

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme (ou une fonction holomorphe).

Un *point périodique* pour f est un point x de \mathbb{C} tel qu'il existe un $n > 0$ pour lequel $f^n(x) = x$. Le plus petit n ayant cette propriété est la *période* k de x . Le *cycle* de x est alors $\{x_0, \dots, x_{k-1}\}$, où $x_i = f^i(x)$, et la *valeur propre* de ce cycle est $\rho = (f^k)'(x) = \prod_i f'(x_i)$. On dit que x est un point périodique *attractif* (resp. *répulsif*, resp. *indifférent*) si $|\rho| < 1$ (resp. $|\rho| > 1$, resp. $|\rho| = 1$). Un point périodique est dit *superattractif* si $\rho = 0$; cela équivaut à l'existence d'un point critique dans le cycle. On dit que x est un point pré-périodique s'il existe un entier ℓ tel que $f^\ell(x)$ soit périodique.

Si x est un point périodique attractif de période k , le *bassin* de x est l'ensemble des points z tels que $f^{nk}(z)$ tende vers x quand n tend vers ∞ . Le bassin immédiat de x est la composante connexe du bassin de x contenant x . Le bassin (resp. bassin immédiat) d'un cycle attractif est la réunion des bassins (resp. bassins immédiats) des points de ce cycle.

Soient f un polynôme et x un point périodique attractif de f . Le bassin de x est contenu dans K_f , donc $x \in \overset{\circ}{K}_f$.

Lemme. — Le bassin immédiat de x est la composante connexe U_x de $\overset{\circ}{K}_f$ contenant x .

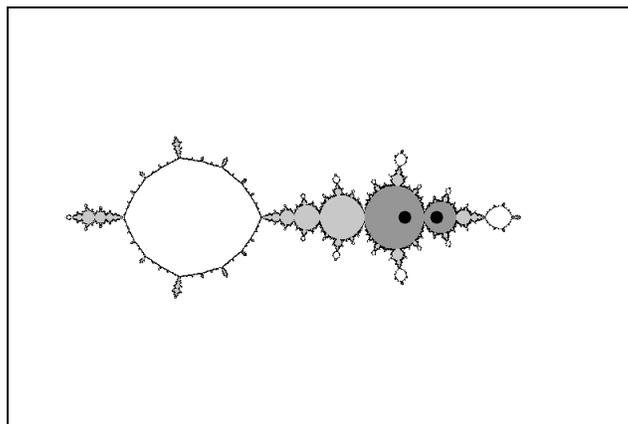


FIGURE 4. Le polynôme $f(z) = -1.1z + 2.95iz^2 + z^3$ a un cycle attractif de période 2 indiqué sur la figure. Le bassin de ce cycle est colorié en gris, et le bassin immédiat en gris foncé.

Démonstration. — Ce bassin immédiat est évidemment contenu dans U_x .

Soit V un disque fermé pour la métrique de Poincaré de U_x , de centre x . L'application f^k induit une application holomorphe de U_x dans lui-même, qui n'est pas un isomorphisme, donc lipschitzienne de rapport $\lambda < 1$ sur V ; par suite, tout point de V est attiré par x . Cqfd.

Proposition 5 (Fatou, Julia). — *Tout cycle attractif a dans son bassin immédiat un point critique au moins.*

Démonstration. — Le bassin immédiat U_x d'un point x du cycle contient un point critique de f^k ; sinon U_x serait isomorphe au disque \mathbb{D} et f^k serait un automorphisme de U_x dont l'inverse contredirait le lemme de Schwarz. La proposition en résulte. Cqfd.

Corollaire. — *Un polynôme de degré d a au plus $d - 1$ cycles attractifs.*

Si x est un point périodique indifférent, sa valeur propre ρ est de la forme $e^{2i\pi\theta}$; on dit que x est un point périodique indifférent rationnel, diophantien, liouvillesque si θ a ces propriétés. On dit que x est linéarisable s'il existe un difféomorphisme φ d'un voisinage V de x sur un disque tel que $\varphi \circ f^k \circ \varphi^{-1}$ soit $z \mapsto \rho z$. Le plus grand V possible est le *domaine de linéarisation* de x .

Théorème (Siegel). — *Tout point périodique, indifférent, diophantien est linéarisable.*

Pour une démonstration, voir Siegel, Iteration of analytic functions, Ann. Math. 43 (1942).

On peut donner une démonstration plus simple pour θ diophantien d'exposant 2 (Herman).

Rüssmann (1972) a étendu ce théorème à certaines valeurs non diophantiennes de θ .⁽³⁾

7. Caractérisation des polynômes hyperboliques ou sous-hyperboliques

Théorème 1. — *Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme. Pour que f soit hyperbolique (resp. sous-hyperbolique), il faut et il suffit que tout point critique de f appartenant à K_f soit attiré par un cycle attractif (resp. soit prépériodique ou attiré par un cycle attractif).*

Démonstration

a) *Il faut.* — Soient V un voisinage de J_f , μ une métrique riemannienne admissible sur V , $E \subset V$ un ensemble fini et $\lambda > 1$ tels que μ soit à coefficient continu sur $V \setminus E$ et que, pour tout $x \in (V \setminus E) \cap f^{-1}(V \setminus E)$, on ait $\|T_x f\|_\mu \geq \lambda$. Pour $\varepsilon > 0$, notons V_ε l'ensemble des $x \in V$ tels que $d_\mu(x, J_f) \leq \varepsilon$. Si ε est assez petit, on a $f^{-1}(V_\varepsilon) \subset V$; alors $f^{-1}(V_\varepsilon) \subset V_{\varepsilon/\lambda} \subset \overset{\circ}{V}_\varepsilon$. En effet, pour tout $x \in V_\varepsilon$ et tout $\varepsilon' > \varepsilon$, on peut trouver un chemin γ de μ -longueur $< \varepsilon'$ joignant x à un point de J_f et évitant E ; si $y \in f^{-1}(x)$, on peut relever γ en un chemin d'origine y , on obtient un chemin de μ -longueur $< \varepsilon'/\lambda$ joignant y à un point de J_f , d'où $d_\mu(y, J_f) < \varepsilon'/\lambda$.

Choisissons un tel ε et posons $L = K_f \setminus \overset{\circ}{V}_\varepsilon$. L'ensemble L est compact, donc la famille $(U_i)_{i \in J}$ des composantes connexes de $\overset{\circ}{K}_f$ qui rencontrent L est finie et chacune de ces composantes est prépériodique. D'autre part, on a $f(L) \subset \overset{\circ}{L}$; donc si $f^k(U_i) \subset U_i$, on a $f^k(U_i \cap L) \subset U_i \cap \overset{\circ}{L}$ et f^k induit une application de $U_i \cap L$ dans lui-même fortement contractante pour la métrique de Poincaré de U_i . Il en résulte que tout point de L est attiré par un cycle attractif.

Soit E^* l'ensemble des $a \in E$ tels que le coefficient de μ soit borné au voisinage de a . Pour $a \in E^*$, on a $f(a) \in E^*$ si $f(a) \in V$. D'autre part, pour tout point critique c de f appartenant à V , on a $f(c) \in E^*$ si $f(c) \in V$. Soit c un point critique de f , appartenant à K . Si $(\forall n) f^n(c) \in V_\varepsilon$, l'ensemble des $f^n(c)$ pour $n > 0$ est contenu dans E^* , donc fini, et c est prépériodique. S'il existe un n tel que $f^n(c) \notin V_\varepsilon$, pour un tel n on a $f^n(c) \in L$ et c est attiré par un cycle attractif.

Si $E = \emptyset$, tout point critique est attiré par un cycle attractif.

⁽³⁾En 1942, Brjuno a amélioré le résultat de Siegel. Si le multiplicateur du cycle est $e^{2i\pi\alpha}$ et si $(p_n/q_n)_{n \geq 0}$ sont les réduites de α données par l'algorithme des fractions continues, alors le point périodique est linéarisable à partir du moment où $\sum \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < +\infty$. Un nombre α vérifiant cette condition est appelé un nombre de Brjuno. En 1987, Yoccoz a démontré que cette condition est optimale dans le sens où le polynôme quadratique $P(z) = e^{2i\pi\alpha}z + z^2$ est linéarisable en 0 si et seulement si α est un nombre de Brjuno.

b) *Il suffit.* — Soit $R > R^*$, de sorte que $f^{-1}(\overline{D}_R) \subset D_R$. Choisissons pour chaque point périodique attractif a de f un disque ouvert Δ_a centré en a de façon que $f(\overline{\Delta}_a) \subset \Delta_{f(a)}$. Posons $U_0 = D_R \setminus \bigcup_{a \in A} \Delta_a$, où A est l'ensemble des points périodiques attractifs, et $U_n = f^{-n}(u_0)$. Par construction de U_0 , l'ouvert U_1 est relativement compact dans U_0 , et comme $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est propre, U_{n+1} est relativement compact dans U_n pour tout n .

Supposons d'abord que *tout point critique appartenant à K_f soit attiré par un cycle attractif*. Il existe alors un n tel que U_n ne contienne aucun point critique de f . Fixons un tel n et notons μ la métrique de Poincaré de U_n (pour chaque composante connexe V de U_n , on prend la métrique de Poincaré du revêtement universel \tilde{V} de V et on la descend sur V). Soient V et V' deux composantes connexes de U_n telles que V' contienne une composante connexe W de $f^{-1}(V)$. Alors, il existe une application $g : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$ qui est « une détermination de f^{-1} », plus précisément telle que $f \circ \pi' \circ g = \pi$ où $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ et $\pi' : \tilde{V}' \rightarrow V'$ sont les projections. En fait, $V' \supset \overline{W}$, donc g n'est pas surjective, et $\|T_{\tilde{x}}g\| < 1$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{V}$, la norme étant prise pour les métriques de Poincaré de \tilde{V} et \tilde{V}' . Par suite, $\|T_x f\|_\mu > 1$ pour tout $x \in U_{n+1}$, et f est dilatante pour μ .

Supposons seulement, maintenant, que *tout point critique appartenant à K_f soit prépériodique ou attiré par un cycle attractif*. Il existe un n tel que tout point critique c de f appartenant à U_n soit prépériodique, avec $f^p(c) \in U_n$ pour tout p . Fixons un tel n et notons E la réunion des orbites directes de ces points critiques. C'est un ensemble fini, et il n'y a pas, dans E , de point critique périodique (car un tel point serait superattractif, donc dans A). Pour $x \in E$, on peut définir $\delta(x)$ et $\nu(x) \in \mathbb{N}$ par : $\delta(x) = \prod_{p \geq 0} \deg_{f^p(x)} f$ et

$$\nu(x) = \frac{1}{\delta(x)} \text{p.p.c.m.} \{ \delta(y) \}_{y \in (\bigcup f^{-p}(x)) \cap E}.$$

Pour tout $x \in E$, on a $\delta(x) = \deg_x f \cdot \delta(f(x))$, et $\nu(f(x))$ est un multiple de $\deg_x(f) \cdot \nu(x)$.

Soit X un revêtement ramifié fini de U_n , non ramifié au-dessus de $U_n \setminus E$ et avec comme degré de ramification $\nu(x)$ en chaque point au-dessus de x pour $x \in E$. Notons \tilde{X} le revêtement universel de X , et $\pi_{\tilde{X}}$ la projection $\tilde{X} \rightarrow U_n$. Alors, \tilde{X} induit un revêtement galoisien de $U_n \setminus E$, et la métrique de Poincaré $\mu_{\tilde{X}}$ de X descend sur $U_n \setminus E$ et y donne une métrique riemannienne μ . Au voisinage de chaque point $x \in E$, le coefficient de μ est de la forme $u(z)/|z-x|^\beta$ où u est continue > 0 et $\beta = (\nu-1)/\nu$; par suite, μ est une métrique riemannienne admissible sur U_n .

Soient x et y deux points de U_n tels que $y \in f^{-1}(x)$. Il existe alors deux points \tilde{x} et \tilde{y} de \tilde{X} au-dessus de x et y respectivement, et une application holomorphe $g : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$, qui est un relèvement de f^{-1} telle que $f(\tilde{x}) = \tilde{y}$. L'application g est contractante pour la métrique de Poincaré de \tilde{X} . Mieux, comme l'image dans X de $g(\tilde{X})$ est contenue dans $\pi_X^{-1}(U_{n+1})$, donc relativement compacte, g est lipschitzienne de rapport $\lambda_g < 1$.

On a :

$$\|T_y f\|_\mu = \frac{1}{\|T_{\tilde{X}g}\|_{\mu_{\tilde{X}}}} > \frac{1}{\lambda_g}.$$

Quand on fait varier y dans une composante connexe de U_{n+1} , on peut garder la même application g , et comme U_{n+1} n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, il existe un $\lambda < 1$ tel que, pour tout $y \in U_{n+1} \setminus E$, on ait $\|T_y f\|_\mu > 1/\lambda$. Autrement dit, f est fortement dilatante pour μ , qui est une métrique riemannienne admissible sur U_n . Cqfd.

Remarque. — Il existe des polynômes dont l'ensemble de Julia est connexe, mais non localement connexe. C'est le cas par exemple pour f polynôme de degré 2 admettant un point fixe (ou périodique) indifférent non linéarisable. Pour une démonstration, voir Séminaire Bourbaki, novembre 1982, [**Bbk**].

EXPOSÉ IV

ARBRES DE HUBBARD

1. Action sur $\pi_0(\overset{\circ}{K}_f)$

Soit f un polynôme de degré $d \geq 2$, et notons $(U_i)_{i \in I}$ la famille des composantes connexes de $\overset{\circ}{K}$, de sorte que $I = \pi_0(\overset{\circ}{K}_f)$. Rappelons que, pour tout $i \in I$, $f(U_i)$ est un des U_j , avec un j qu'on note $f_*(i)$, et que $f : U_i \rightarrow U_j$ est holomorphe et propre de degré d_i , avec $d_i - 1$ égal au nombre de points critiques dans U_i , comptés avec multiplicité, de sorte que $\sum_i (d_i - 1) \leq d - 1$ (égalité si et seulement si f est hyperbolique avec K_f connexe).

Proposition 1. — *On suppose f sous-hyperbolique.*

- a) *Tout élément de I est prépériodique pour f_* .*
- b) *Pour tout i périodique, U_i contient un point périodique attractif, dont il est le bassin immédiat.*
- c) *Tout cycle de composantes connexes de $\overset{\circ}{K}_f$ contient au moins un point critique.*

Remarque. — a) est vrai sans l'hypothèse de sous-hyperbolicité (Sullivan), mais la démonstration est beaucoup plus difficile.

Démonstration. — Soit V un voisinage de J_f , μ une métrique riemannienne admissible sur V et $\lambda > 1$, tels que $\forall x \in V' = f^{-1}(V)$, $\|T_x f\|_\mu \geq \lambda$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $V_1 = \{x \in V, d_\mu(x, J_f) < \varepsilon\}$ soit relativement compact dans V ; posons $V'_1 = f^{-1}(V_1)$ et $L = K_f \setminus V'_1$. L'ensemble L est compact et on a $f(L) = K_f \setminus V_1 \subset \overset{\circ}{L}$. Notons I_L l'ensemble des $i \in I$ tels que $U_i \cap L \neq \emptyset$. Comme les $U_i \cap L$ forment un recouvrement de L par des ouverts disjoints, I_L est fini.

(a) On a $f_*(I_L) = I_L$, donc tout élément de I_L est prépériodique. Soient $i \in I$, $x \in U_i$ et

$$n \geq \frac{\log \varepsilon - \log d(x, J_f)}{\log \lambda}.$$

Alors $f^n(x) \in L$, d'où $f^n(i) \in I_L$, donc i est prépériodique.

(b) Soit i tel que $f_*^k(i) = i$, avec $k \geq 1$. On a alors $f^k(L \cap U_i) \subset L' \cap U_i \subset \overset{\circ}{L} \cap U_i$. Il en résulte que $\text{diam}(f^k(L \cap U_i)) < \text{diam}(L^k \cap U_i)$, où le diamètre est mesuré pour la métrique de Poincaré de U_i . Par suite, $f^k : U_i \rightarrow U_i$ n'est pas un isomorphisme, $\|T_x f^k\| < 1$ pour tout $x \in L \cap U_i$, $\sup_{L \cap U_i} \|T_x f^k\| < 1$, $f^k : L \cap U_i \rightarrow L \cap U_i$ est fortement contractante, donc admet un point fixe α_i attractif.

Le point périodique α_i attire tout point de $L \cap U_i$, et en faisant varier ε , on voit qu'il attire tout point de U_i , donc U_i est contenu dans le bassin de α_i . Comme il est connexe, il est contenu dans le bassin immédiat. Ce bassin immédiat est connexe, contenu dans $\overset{\circ}{K}_f$ et contient α_i , donc contient U_i , et finalement lui est égal.

(c) L'application $f^k : U_i \rightarrow U_i$ est holomorphe et propre mais n'est pas un isomorphisme, donc est de degré $\delta > 1$. Or, $\prod_{j=0}^{k-1} d_{f_*^j(i)} = \delta$, donc l'un de ces facteurs est > 1 , et l'ouvert $U_{f_*^j(i)}$ correspondant contient un point critique. Cqfd.

2. Les centres des U_i

On garde les notations du §1.

Proposition 2. — *On suppose que tout point critique de f est prépériodique. On peut alors choisir, pour tout $i \in I$, un isomorphisme $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{D}$ de façon que $\forall i$, $\varphi_{f_*(i)} \circ f \circ \varphi_i^{-1} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ soit l'application $z \mapsto z^{d_i}$. Si $d = 2$, ce choix est possible de façon unique.*

Lemme. — *Soit $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une application holomorphe et propre, de degré δ , telle que $h(0) = 0$. On suppose que tout point critique de h est prépériodique. Alors, h est de la forme $z \mapsto \lambda z^\delta$ avec $|\lambda| = 1$.*

Démonstration. — Si $\delta = 1$, h est un isomorphisme, donc de la forme $z \mapsto \lambda z$. On peut donc supposer $\delta > 1$. Alors, 0 attire \mathbb{D} , et tout point critique de h tombe sur 0 en un temps fini.

Notons A la réunion des orbites directes des points critiques de h . L'ensemble A est fini. Soit γ un lacet entourant A tel que $\gamma \cap h^{-n}(A) = \emptyset$ pour tout n , et posons $\gamma_n = h^n(\gamma)$. Pour n assez grand, γ_n est contenu dans un petit disque de centre 0, qui ne contient aucun autre point de A . Alors, γ_n est homotope dans $\mathbb{D} \setminus A$ à un lacet η_n de longueur arbitrairement petite pour la métrique de Poincaré de $\mathbb{D} \setminus A$. Comme $h^n : \mathbb{D} \setminus f^{-n}(A) \rightarrow \mathbb{D} \setminus A$ est un revêtement, γ est homotope dans $\mathbb{D} \setminus h^{-n}(A)$ (et à fortiori dans $\mathbb{D} \setminus A$) à un lacet η relevant η_n . On a alors $\text{long}_{\mathbb{D}}(\eta) \leq \text{long}_{\mathbb{D} \setminus h^{-n}(A)} \eta = \text{long}_{\mathbb{D} \setminus A} \eta_n$ arbitrairement petite, ce qui montre que A est réduit à un point qui est nécessairement 0. La multiplicité de 0 comme point critique est $\delta - 1$.

L'application h est donc de la forme $z \mapsto u(z) \cdot z^\delta$, où u est holomorphe, ne s'annule pas, et $|u(z)| \rightarrow 1$ puisque h est propre. Par suite, u est constante de module 1. Cqfd.

Démonstration de la proposition 2. — Soit $i \in I$ un point périodique de période k , et α_i le point périodique attractif pour f appartenant à U_i . Soit $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{D}$ un isomorphisme tel que $\varphi(\alpha_i) = 0$ et posons $h = \varphi_i \circ f^k \circ \varphi_i^{-1}$. Il résulte du lemme que h est de la forme $z \mapsto \lambda z^\delta$, et on a $\delta > 1$ en vertu de la proposition 1 (c). Si on remplace φ_i par $\mu\varphi_i$ avec $|\mu| = 1$, on remplace λ par $\mu^{\delta-1}\lambda$. Par suite, on peut choisir φ_i de façon que $\lambda = 1$. Ce choix peut être fait de $\delta - 1$ façons.

Pour $0 \leq \ell \leq k - 1$, la relation d'équivalence définie sur U_i par f^ℓ est plus fine que celle définie par f^k ; transportée à \mathbb{D} par φ_i , elle devient de la forme $z \sim z'_1 \Leftrightarrow z^{\delta'} = z'^{\delta'}$, où δ' est un diviseur de δ . On peut donc choisir, de façon unique $\varphi_{f_*^\ell(i)} : U_{f_*^\ell(i)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$, tel que $\varphi_{f_*^\ell(i)} \circ f^\ell \circ \varphi_i^{-1}$ soit $z \mapsto z^{\delta'}$.

On a alors $\varphi_{f_*(j)} \circ f \circ \varphi_j = (z \mapsto z^{d_j})$ pour tout j dans le cycle $\{f_*^\ell(i)\}_{\ell=0, \dots, k-1}$. On procède de même pour chacun des cycles de f_* . On construit ensuite par récurrence sur ν les φ_i pour les i tels que $f_*^\nu(i)$ soit périodique. Le point $\varphi_i^{-1}(0)$ est appelé le *centre* de U_i . Le pas de récurrence se fait en observant que, s'il y a un point critique dans U_i , son image est nécessairement le centre de $U_{f_*(i)}$ car dans cet ouvert le centre est le seul point prépériodique. On a alors d_i choix possibles pour φ_i . Finalement, le nombre de choix pour la famille (φ_i) est $\prod_{\zeta \text{ cycle}} ((\prod_{i \in \zeta} d_i)) \times \prod_{i \text{ non périodique}} d_i$.

En particulier, si $d = 2$, il y a 1 point critique simple (donc avec un $d_i = 2$) dans l'unique cycle, donc 1 choix pour la famille. Cqfd.

Remarque. — Même s'il a du choix pour les φ_i , pour chaque i le *centre* $\varphi_i^{-1}(0)$ de U_i est déterminé de façon unique.

3. L'arbre de Hubbard

Dans la suite, f désigne un polynôme de degré $d \geq 2$ tel que tout point critique soit prépériodique. On rappelle que cela entraîne que f est sous-hyperbolique, et que K_f est connexe. On reprend les notations des §1 et 2. En particulier, chaque U_i est muni d'un centre, ce qui permet de définir les *arcs réglementaires*.

On rappelle que, si x et y sont deux points de K_f , il existe un arc réglementaire unique $[x; y]_{K_f}$ d'extrémités x et y , et que si (x_s) est une famille de points de K_f , l'ensemble $\bigcup [x_{s_1}, x_{s_i}]_{K_f}$ est un arbre topologique fini, appelé *enveloppe réglementairement convexe* (ou enveloppe réglementaire) des x_s .

Définition. — Nous appellerons arbre de Hubbard de f l'enveloppe réglementairement convexe H_f de la réunion des orbites directes des points critiques.

Notons C l'ensemble des points critiques de f et (H_σ) les fermetures des composantes de $H_f \setminus C$.

Proposition 3. — *L'application f induit une application continue de H_f dans lui-même, dont la restriction à chacun des H_σ est injective.*

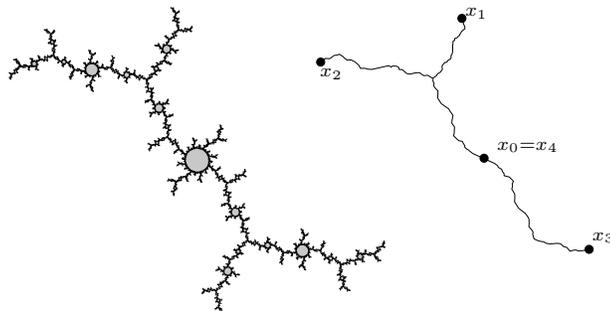


FIGURE 1. Un exemple d'arbre de Hubbard. Le point critique est périodique de période 4.

Lemme 1. — Soit $\Gamma \subset K_f$ un arc réglemентаire ne contenant pas de point critique de f sauf éventuellement ses extrémités. Alors, $f|_{\Gamma}$ est injective et $f(\Gamma)$ est un arc réglemентаire.

Démonstration. — Soit $\gamma : I \rightarrow K_f$ un chemin injectif d'image Γ . Si $f \circ \gamma$ est injectif, son image est un arc réglemентаire car f transforme un rayon interne de \overline{U}_i en un rayon interne de $\overline{U}_{f^*(i)}$. Montrons que $\eta = f \circ \gamma$ est nécessairement injectif. Il est clair que γ est localement injectif, donc $S = \{(t_1, t_2) \mid t_1 < t_2 \text{ et } \eta(t_1) = \eta(t_2)\}$ est compact. Supposons $S \neq \emptyset$, et soient $(t_1, t_2) \in S$ avec $t_2 - t_1$ minimum et $t_3 \in]t_1, t_2[$. Alors, $\eta([t_1, t_3])$ et $\eta([t_3, t_2])$ sont des arcs réglemентаires de mêmes extrémités; ils coïncident, ce qui est en contradiction avec l'injectivité de η sur $]t_1, t_2[$. On a donc $S = \emptyset$, η est injectif et $f(\Gamma) = \eta(I)$ est un arc réglemентаire. Cqfd.

Lemme 2. — Soient (x_s) une famille finie de points de K_f et H l'enveloppe réglemентаirement convexe des (x_s) . Alors, $f(H)$ est l'enveloppe réglemентаirement convexe des $f(x_s)$ et des $f(w)$ pour $w \in H \cap C$.

Démonstration. — L'ensemble H est réunion d'arcs réglemентаires de la forme $[x_{s_1}, x_{s_2}]_{K_f}$, $[x_s, w]_{K_f}$, $[w_1, w_2]_{K_f}$ ne contenant pas d'élément de C sauf éventuellement leurs extrémités. Alors, $f(H)$ est la réunion des $[f(x_{s_1}), f(x_{s_2})]_{K_f}$, $[f(x_{s_1}), f(w)]_{K_f}$, $[f(w_1), f(w_2)]_{K_f}$ correspondants, donc est contenu dans l'enveloppe réglemентаirement convexe des $f(x_s)$ et des $f(w)$. Comme il est connexe et contient les $f(x_s)$ et les $f(w)$, $f(H)$ est égal à cette enveloppe. Cqfd.

Démonstration de la proposition 3. — La première assertion résulte du lemme 2. Si x et y sont deux points distincts du même H_σ , l'arc $\Gamma = [x, y]_{K_f}$ ne contient pas de point critique, sauf éventuellement x ou y , donc $f|_\Gamma$ est injective et $f(x) \neq f(y)$. Cqfd.

4. Cas du degré 2

On suppose en outre $d = 2$, et f de la forme $z \mapsto z^2 + c$. Le point critique est 0. On pose $a_n = f^n(0)$, et on note A l'orbite directe de 0 (qui est finie par hypothèse). Deux cas sont possibles :

Cas périodique. — 0 est périodique, on note k sa période; on a donc $d_0 = 2$, $d_i = 1$ pour $i = 1, \dots, k-1$, et $f^k : U_0 \rightarrow U_0$ est de degré $\delta = 2$:

$$U_0 \xrightarrow[\leftarrow 2 \rightarrow 1]{f} U_1 \xrightarrow[1 \rightarrow 1]{f} U_2 \xrightarrow[1 \rightarrow 1]{f} \cdots \xrightarrow[1 \rightarrow 1]{f} U_{k-1}$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{f \atop 1 \rightarrow 1}$$

Toute autre composante de $\overset{\circ}{K}_f$ tombe en un temps fini, par un homéomorphisme, sur l'un des U_i .

Cas strictement prépériodique (ou de Misurewicz). — 0 tombe en ℓ coups sur un cycle d'ordre k : on a $a_\ell = a_{k+\ell}$, $a_{\ell-1} \neq a_{k+\ell-1}$, d'où $\ell \geq 2$ et $a_{\ell-1} = -a_{k+\ell-1}$. L'ensemble K est d'intérieur vide (proposition 2) et le cycle $\{a_\ell, \dots, a_{\ell+k-1}\}$ est répulsif. Notons $\nu(i)$ le nombre de brins de l'arbre H_f en a_i .

Proposition 4. — On suppose $d = 2$.

a) *Cas périodique :*

Si $k = 1$, on a $c = 0$, $\nu(0) = 0$.

Si $k > 1$, il existe r , $2 \leq r \leq k$, tel que $\nu(i) = 1$ pour $1 \leq i \leq r$ et $\nu(i) = 2$ pour $r < i \leq k$.

Les arguments internes des brins en a_i sont : 0 si $\nu(i) = 1$, 0 et $1/2$ si $\nu(i) = 2$.

b) *Cas strictement prépériodique :* On a $\nu(0) = 2$,

$$\nu(1) = \nu(2) = 1 \leq \dots \leq \nu(\ell) = \dots = \nu(\ell + k - 1).$$

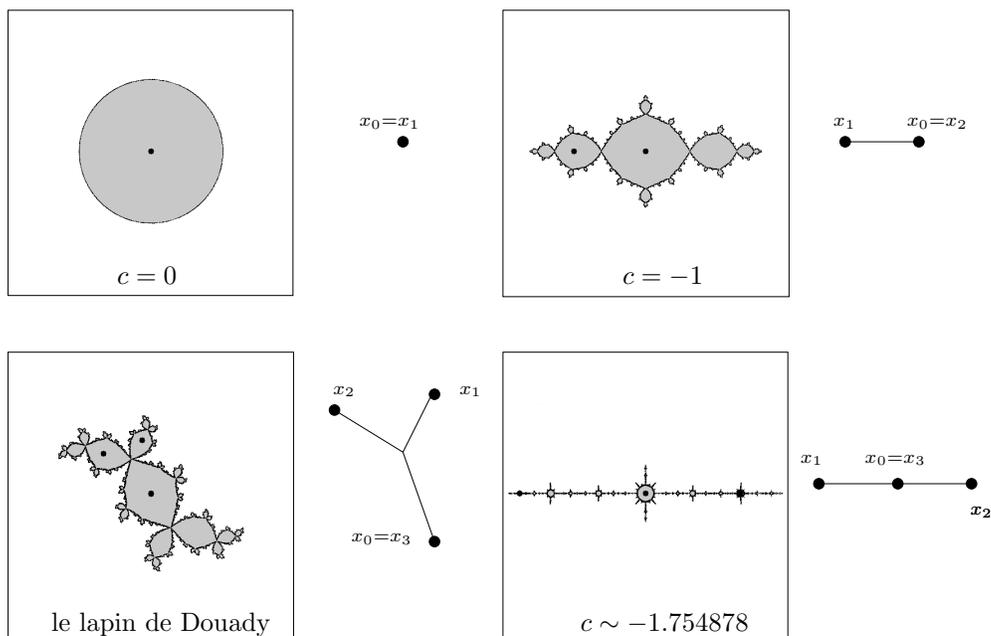
Démonstration

a) Puisque $f(H_f) \subset H_f$, on a $\nu(1) \geq \frac{1}{2}\nu(0)$, et $\nu(1) \leq \nu(2) \leq \dots \leq \nu(k) = \nu(0)$. D'autre part, si $H_f \neq \{a_0\}$, cet arbre a au moins deux extrémités, donc il existe au moins 2 valeurs de i telles que $\nu(i) = 1$, d'où $\nu(i) = \nu(2) = 1 \leq \dots \leq \nu(k) = \nu(0) \leq 2$. Notons A_i l'ensemble des arguments internes des brins en a_i (de sorte que $\nu_i = \#A_i$), et $q : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ l'application $t \mapsto 2t$. On a $q(A_1) \subset A_1$ puisque $f^k(H) \subset H$, d'où $A_1 = \{0\}$. On a $q(A_0) \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_k = A_0$, d'où $A_0 \subset q^{-1}(0) = \{0, 1/2\}$ et $\{0\} \subset A_i \subset \{0, 1/2\}$.

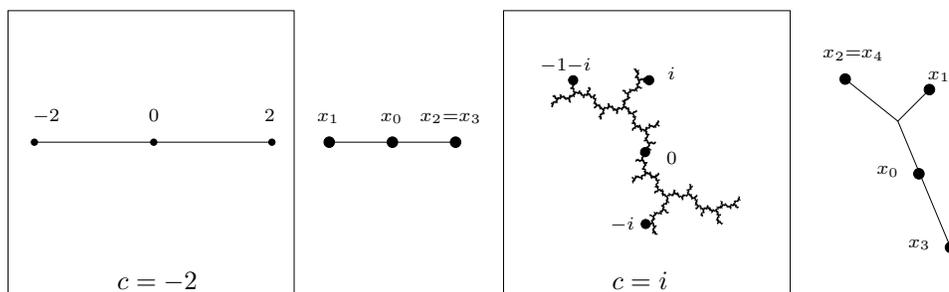
b) On a encore :

$$\frac{1}{2}\nu(0) \leq \nu(1) \leq \dots \leq \nu(\ell) \leq \dots \leq \nu(\ell + k - 1) \leq \nu(\ell + k) = \nu(\ell).$$

Montrons que $\nu(0) > 1$. Si on avait $\nu(0) = 1$, l'application $f : H \rightarrow H$ serait injective ; en contradiction avec $f(a_{\ell-1}) = f(a_{\ell+k-1})$. Comme H_f doit avoir au moins deux extrémités, on a $\nu(1) = \nu(2) = 1$. Cqfd.



Quatre arbres de Hubbard périodiques.



Deux arbres de Hubbard prépériodiques.

EXPOSÉ V

ENSEMBLES DE JULIA DE MESURE NULLE⁽¹⁾

La question de savoir si J_f est de mesure nulle pour tout polynôme f est ouverte (même pour les polynômes $z \mapsto z^2 + c$). Nous montrons que c'est le cas si f est hyperbolique, ou seulement sous-hyperbolique (dans ce dernier cas, la démonstration est seulement esquissée).⁽²⁾

1. Distorsion

Définition. — Soient U un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe. On appelle distorsion de f sur U le nombre :

$$\text{dist}_U(f) = \sup_{x, y \in U} \left| \text{Log} \frac{f'(y)}{f'(x)} \right|.$$

Commentaire. — On a $\text{dist}_U(f) = 0$ si f est affine. On a $\text{dist}_U(f) = \infty$ a un point critique ou si f' est une application $u \rightarrow \mathbb{C}^*$ non homotope à une constante. Dans les autres cas, il faut prendre la détermination du Log qui vaut 0 si $x = y$.

Si $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow \mathbb{C}$ sont des applications holomorphes, on a

$$\text{dist}_U(g \circ f) \leq \text{dist}_U(f) + \text{dist}_V(g).$$

⁽¹⁾Les résultats de cet exposé ont été obtenus indépendamment par M. Yu. Lyubich. Une démonstration succincte est publiée dans « On typical behaviour of the trajectories of a rational mapping of the sphere » (Dokl., t. 268 (1982), n°1 ; traduction Soviet Math. Dokl., vol. 27 (1983), n°1).

⁽²⁾Si f est géométriquement fini (tout point critique dans l'ensemble de Julia a une orbite finie, ce qui autorise la présence de cycles indifférents rationnels), on sait que l'ensemble de Julia est de mesure nulle. Dans le cas des polynômes quadratiques, Lyubich et indépendamment Shishikura, ont démontré que l'ensemble de Julia d'un polynôme non infiniment renormalisable est de mesure nulle. Petersen et plus tard Petersen-Zakeri ont démontré que pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, un polynôme quadratique ayant un point périodique indifférent irrationnel de multiplicateur $e^{2i\pi\alpha}$ a un ensemble de Julia de mesure nulle.

Si $f : U \xrightarrow{\sim} V$ est un isomorphisme, on a : $\text{dist}_U(f) = \text{dist}_V(f^{-1})$. On a

$$\text{dist}_U(f) \leq \text{diam int}(U) \cdot \sup \left| \frac{f''}{f'} \right|,$$

où

$$\text{diam int}(U) = \sup_{x,y \in U} \left(\inf_{\substack{\gamma \text{ chemin de} \\ x \text{ à } y}} (\ell(\gamma)) \right), \quad \ell(\gamma) = \text{longueur de } \gamma.$$

Théorème 1 (Quasi-auto-similitude). — Soient U un ouvert de \mathbb{C} , $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe, $\Lambda \subset U$ un compact tel que $f(\Lambda) \subset \Lambda$ et que f soit expansive sur Λ . Alors :

$$(\forall m > 0) (\exists a, b)_{\substack{b > a > 0 \\ 0 \leq \varepsilon \leq a}} (\forall \varepsilon) (\forall x \in \Lambda) (\exists n \in \mathbb{N}) \\ B(f^n(x), a) \subset f^n(B(x, \varepsilon)) \subset B(f^n(x), b) \quad \text{et} \quad \text{dist}_{B(x, \varepsilon)}(f^n) \leq m.$$

Démonstration. — Soient U_1 un voisinage relativement compact de Λ dans U , $u : \bar{U}_1 \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une application continue définissant une métrique riemannienne μ et $\lambda > 1$, tels que $\|T_z f\|_\mu \geq \lambda$ pour tout $z \in U_1 \cap f^{-1}(U_1)$.

Posons

$$M_1 = \inf_{U_1} u, \quad M_2 = \sup_{U_1} u, \quad M_3 = \sup_{U_1} \left| \frac{f''}{f'} \right|, \quad M_4 = \sup_{U_1} |f'|, \\ M = \frac{M_2 M_3}{M_1} \quad \text{et} \quad b_0 = d(\Lambda, \mathbb{C} \setminus U_1).$$

Soit m tel que $0 < m \leq 1$; posons

$$b = \inf \left(b_0 \frac{M_1}{M_2}, \frac{m(\lambda - 1)}{2m} \right) \quad \text{et} \quad a = \frac{b e^{-2m}}{M_4}.$$

Soit $x \in \Lambda$; posons $x_k = f^k(x)$ et $\rho_k = (f^k)'(x)$ pour tout k . Choisissons $n \in \mathbb{N}$ arbitrairement, posons $V_n = B(x_n, b)$ et, pour $0 \leq k \leq n$, notons V_k la composante connexe de $f^{-(n-k)}(V_n)$ contenant x_k , de sorte que f^{n-k} induit un homéomorphisme de V_k sur V_n . On a

$$\text{diam int}(V_k) \leq \frac{2bM_2}{M_1 \lambda^{n-k}},$$

d'où

$$\text{dist}_{V_k}(f) \leq \frac{2bM}{\lambda^{n-k}} \quad \text{et} \quad \text{dist}_{V_0}(f^n) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \text{dist}_{V_k}(f) < \frac{2bM}{\lambda - 1} \leq m.$$

Il en résulte que

$$V_0 \supset B\left(x_0, \frac{b}{\rho^n} e^{-m}\right) \quad \text{et} \quad f^{-n}(B(x_n, a)) \cap V_0 \subset B\left(x_0, \frac{a}{\rho^n} e^m\right).$$

Posons $\varepsilon_0 = b e^{-m}$ et soit ε tel que $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Revenons maintenant sur le choix de n . Comme on a $\rho_k < \rho_{k+1} \leq M_4 \rho_k$ pour tout k , et $M_4 e^m a = e^{-m} b$, si n est la plus grande valeur de k telle que $\rho_k \varepsilon \leq e^{-m} b$, on a : $\rho_n \varepsilon \geq e^m a$, d'où

$$f^{-n}(B(x_n, a)) \cap V_0 \subset B(x_0, \varepsilon) \subset V_0 \quad \text{et} \quad B(x_n, a) \subset f^n(B(x_0, \varepsilon)) \subset B(x_n, b)$$

et $\text{dist}_{B(x_0, \varepsilon)} f^n \leq m$. Cqfd.

2. Densité

Dans \mathbb{R}^N (ici $N = 2$), soient Λ et V deux ensembles mesurables, avec $0 < \text{mes} V < \infty$ ($\text{mes}(V)$ désigne la mesure de Lebesgue de V). On appelle *densité* de Λ dans V le nombre

$$d_V(\Lambda) = \frac{\text{mes}(\Lambda \cap V)}{\text{mes}(V)}.$$

Si $V \subset V'$ avec $\text{mes}(V') < \infty$, on a

$$d_{V'}(\Lambda) \geq \frac{\text{mes}(V)}{\text{mes}(V')} d_V(\Lambda) \quad \text{et} \quad 1 - d_{V'}(\Lambda) \geq \frac{\text{mes}(V)}{\text{mes}(V')} (1 - d_V(\Lambda)).$$

Rappelons le théorème de densité de Lebesgue : *Pour presque tout $x \in \Lambda$, la densité $d_{B(x, r)} \Lambda$ tend vers 1 quand $r \rightarrow 0$.* Nous utiliserons le résultat plus faible suivant :

Proposition 1. — *Soit $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ un compact. Si $\text{mes}(V) > 0$, on peut choisir pour tout $\rho > 0$ un point $x_\rho \in \Lambda$ de façon que $d_{B(x_\rho, \rho)} \Lambda \rightarrow 1$ quand $\rho \rightarrow 0$.*

Démonstration. — Pour $\rho > 0$, notons \mathcal{P}_ρ un pavage de \mathbb{R}^n par des cubes de côté 4ρ , et $\Lambda(\rho)$ la réunion des pavés P de \mathcal{P}_ρ rencontrant Λ . On a $\text{mes}(\Lambda(\rho)) \rightarrow \text{mes}(\Lambda)$, d'où $d_{\Lambda(\rho)} \Lambda \rightarrow 1$. Mais $d_{\Lambda(\rho)} \Lambda$ est la moyenne des $d_P(\Lambda)$, donc on peut choisir pour chaque ρ un pavé P_ρ de \mathcal{P}_ρ de façon que $d_{P_\rho}(\Lambda) \rightarrow 1$. Soit P'_ρ le cube concentrique de côté 2ρ . Pour ρ assez petit, on a $d_{P_\rho}(\Lambda) > 1 - 1/2^N$, donc $\Lambda \cap P'_\rho \neq \emptyset$ et on peut choisir $x_\rho \in \Lambda \cap P'_\rho$. Alors, $B(x, \rho) \subset P_\rho$, et

$$\frac{\text{mes}(B(x, \rho))}{\text{mes}(P_\rho)} = \frac{\text{mes}(B)}{4^N},$$

d'où

$$1 - d_{B(x, \rho)}(\Lambda) \leq \frac{4^N}{\text{mes}(B)} (1 - d_{P_\rho}(\Lambda)) \rightarrow 0. \quad \text{Cqfd.}$$

Proposition 2. — *Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $\Lambda \subset U$ un compact et $V \subset U$ un ouvert tel que $f|_V$ soit injective. Si $\text{dist}_V(f) \leq m$, on a :*

$$1 - d_{f(V)} f(\Lambda) \leq e^{2m} (1 - d_V(\Lambda)).$$

Démonstration. — Soit $h = \inf_V |f'|$. On a $\text{mes}(f(V)) \geq h^2 \text{mes}(V)$ et

$$\begin{aligned} \text{mes}(f(V) \setminus f(\Lambda)) &\leq \text{mes}(f(V \setminus \Lambda)) \leq h^2 e^{2m} \text{mes}(V \setminus \Lambda) \\ &= h^2 e^{2m} (1 - d_V(\Lambda)) \text{mes}(V), \end{aligned}$$

d'où

$$1 - d_{f(V)} f(\Lambda) = \frac{\text{mes}(f(V) \setminus f(\Lambda))}{\text{mes}(f(V))} \leq e^{2m} (1 - d_V(\Lambda)). \quad \text{Cqfd.}$$

3. Le cas hyperbolique

Théorème 2. — Soient $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe et $\Lambda \subset U$ un compact tel que $f(\Lambda) \subset \Lambda$ et que f soit expansive sur Λ . Alors, Λ est de mesure nulle.

Corollaire. — Pour tout polynôme hyperbolique f , l'ensemble J_f est de mesure nulle.

Lemme 1. — L'ensemble Λ est d'intérieur vide.

Démonstration. — Supposons que W soit une composante connexe de $\overset{\circ}{\Lambda}$, et soit $x \in W$. La famille des $f|_W^n$ est bornée, donc les $|(f^n)'(x)|$ forment une suite bornée. Mais comme f est expansive sur Λ , cette suite tend vers $+\infty$. Contradiction. Cqfd.

Démonstration du théorème 2. — Supposons $\text{mes}(\Lambda) > 0$. Choisissons $m > 0$ et soit (ρ_ν) une suite de nombres > 0 tendant vers 0. D'après la proposition 1, on peut trouver pour chaque ν un $x_\nu \in \Lambda$ de façon que $d_{B(x_\nu, \rho_\nu)} \Lambda \rightarrow 1$. D'après le théorème 1, on peut trouver des nombres a et b (indépendants de ν), et pour chaque ν un $n_\nu \in \mathbb{N}$ tel que, en posant $y_\nu = f^{n_\nu}(x_\nu)$, on ait :

$$B(y_\nu, a) \subset f^{n_\nu} B(x_\nu, \rho_\nu) \subset B(y_\nu, b) \quad \text{et} \quad \text{dist}_{B(x_\nu, \rho_\nu)} f^{n_\nu} \leq m,$$

d'où

$$1 - d_{B(y_\nu, a)}(\Lambda) \leq \frac{b^2}{a^2} (1 - d_{f^{n_\nu} B(x_\nu, \rho_\nu)}(\Lambda)) \leq \frac{b^2}{a^2} e^{2m} (1 - d_{B(x_\nu, \rho_\nu)}(\Lambda)) \rightarrow 0.$$

Quitte à extraire une suite, on peut supposer que (y_ν) a une limite y , et que $|y - y_\nu| < a/2$ pour tout ν . Alors,

$$B(y, a/2) \subset B(y_\nu, a), \quad \text{et} \quad 1 - d_{B(y, a/2)}(\Lambda) \leq 4 \cdot (1 - d_{B(y_\nu, a)}(\Lambda)) \rightarrow 0.$$

Mais, cela ne dépend pas de ν ; d'où $d_{B(y, a/2)}(\Lambda) = 1$ et $\Lambda \supset B(y, a/2)$ puisque Λ est compact. Ceci contredit le lemme 1. Cqfd.

4. Cas sous-hyperbolique : construction d'un revêtement

Je n'ai pas bien compris ce paragraphe

Nous allons reprendre la construction ci-dessus en la modifiant de façon à tenir compte de la présence des points critiques.

Soit f un polynôme sous-hyperbolique. Notons A (resp. A^*) la réunion des orbites directes (resp. des orbites directes strictes) des points critiques de f , $\deg_\alpha f$ le degré de ramification de f en α (la valeur de d telle que $f(\alpha + z) = f(\alpha) + cz^d + \dots$ avec $c \neq 0$). Pour $\alpha \in A$, notons $\nu(\alpha)$ le produit des $\deg_\beta(f)$ pour les points critiques qui sont dans l'orbite inverse stricte de α .

Soient U un voisinage relativement compact de J_f tel que $U' = f^{-1}(U) \Subset U$, soit $u : \overline{U} \rightarrow]0, +\infty]$ une fonction continue telle que $u^{-1}(\infty) = A^*$, définissant une métrique riemannienne admissible μ , et $\lambda > 1$ tels que $\|T_x f\|_\mu \geq \lambda$ pour tout $x \in U' \setminus A$. Pour tout $a \in A$, choisissons trois disques $\Delta_\alpha, \Delta'_\alpha, \Delta''_\alpha$ de centre α , de rayon $r_\alpha, r'_\alpha, r''_\alpha$ avec $r''_\alpha < r'_\alpha < r_\alpha$, de façon que

$$\Delta_{f(\alpha)} \Subset f(\Delta_\alpha), \quad \Delta'_{f(\alpha)} \Subset f(\Delta'_\alpha) \subset \Delta_{f(\alpha)}, \quad \Delta''_{f(\alpha)} \Subset f(\Delta''_\alpha),$$

et que les $\overline{\Delta}_\alpha$ soient disjoints.

Nous allons maintenant construire un revêtement ramifié (non galoisien en général), Y de U , ramifié seulement au-dessus de A^* . Soit β un point périodique répulsif de f n'appartenant pas à A , de période k . Notons Y l'ensemble des suites $\underline{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans U telles que $f(x_n) = x_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $(\exists r), x_{kp+r} \rightarrow \beta$ quand $p \rightarrow \infty$. On munit Y de la topologie de la convergence uniforme.

Soit $\underline{x} \in Y$. Il existe un n tel que $x_n \notin A^*$. Alors, pour tout $p \geq n$, on a $x_p \notin A^*$, puisque $f(A^*) \subset A^*$. Si on pose $\rho = d(x_n, A^*)$, pour tout $q \geq 0$ l'application f^q admet une section σ_{n+q} continue sur $D(x_n, \rho)$, telle que $\sigma_q(x_n) = x_{n+q}$. En posant $\sigma_{n-q}(z) = f^q(z)$, on obtient une section σ de $\pi_n : (z_\nu) \rightarrow z_n$, d'où un voisinage de \underline{x} homéomorphe au disque $D(x_n, \rho)$, et muni d'une carte dans ce disque. Ces cartes munissent Y d'une structure de variété. L'application π fait de $Y \setminus \pi^{-1}(A^*)$ un revêtement de $U \setminus A^*$. Pour $a \in A^*$, l'image réciproque de Δ_α se compose de disques analytiques avec degré de ramification divisant $\nu(\alpha)$ (mais en général pas le même d'un disque à l'autre c'est pourquoi le revêtement n'est pas galoisien).

L'application $\tilde{f} : \underline{x} \mapsto (f(x_n)) = (f(x_0), x_0, x_1, \dots)$ est un isomorphisme de $Y' = \pi^{-1}(U')$ sur Y : son inverse est $(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Nous munissons Y des cartes suivantes : Sur $\pi^{-1}(U \setminus \bigcup \overline{\Delta''_\alpha})$, on prend les cartes induites par π . Si $\tilde{\alpha} \in \pi^{-1}(\alpha)$ avec $\alpha \in A$, la composante connexe $\Delta_{\tilde{\alpha}}$ de $\pi^{-1}(\Delta_\alpha)$ contenant $\tilde{\alpha}$ se projette sur Δ_α par une application ramifiée en $\tilde{\alpha}$ de degré $d_{\tilde{\alpha}}$: on munit $\Delta_{\tilde{\alpha}}$ d'une coordonnée $W = W_{\tilde{\alpha}}(\underline{x})$ telle que $(W_{\tilde{\alpha}}(\underline{x}))^{d_{\tilde{\alpha}}} = \pi(\underline{x}) - \alpha = x_0 - \alpha$. Ces cartes forment un atlas \mathcal{A} .

Nous allons maintenant munir Y d'une métrique riemannienne $\tilde{\mu}$. Sur $Y \setminus \pi^{-1}(A^*)$, considérons la métrique riemannienne $\pi^*(\mu)$. Pour chaque $\alpha \in A$, notons $\ell(\alpha)$ le plus petit i tel que $f^i(\alpha)$ soit périodique.

Sur chaque cycle, on peut définir une famille (v_α) de nombres > 0 telle que $|f'(\alpha)|v_{f(\alpha)}/v_\alpha > 1$, puisque dans A tous les cycles sont répulsifs. On définit $\check{\mu}_{\tilde{\alpha}}$ pour

α périodique par $v_\alpha^{1/d_{\tilde{\alpha}}} |dW_{\tilde{\alpha}}|$. On a alors $\|T_{\tilde{\alpha}} \tilde{f}\|_{\tilde{\mu}} > 1$ pour tout $\tilde{\alpha}$ au-dessus d'un point périodique. On peut ensuite par récurrence sur $\ell(\alpha)$ définir pour tout $\alpha \in A$ un v_α de façon que, en définissant $\check{\mu}_{\tilde{\alpha}}$ par la même formule, on ait encore $\|T_{\tilde{\alpha}} \tilde{f}\|_{\check{\mu}} > 1$: il suffit à chaque pas de prendre v_α assez petit.

On peut alors trouver pour chaque α un disque $\Delta_\alpha''' \subset \Delta_\alpha''$ de façon que $\|T_{\tilde{\alpha}} \tilde{f}\|_{\check{\mu}} > 1$ pour $x \in \Delta_\alpha''' = \Delta_{\tilde{\alpha}} \cap \Delta_\alpha''$, $\tilde{\alpha} \in \pi^{-1}(\alpha)$. On pose $\tilde{\mu} = \inf(\pi^* \mu, M^* \check{\mu})$ où M^* est pris assez grand pour que $\pi^* \mu < M^* \check{\mu}$ sur $\partial \Delta_\alpha''$ pour tout $\tilde{\alpha}$ (il suffit de le vérifier pour un nombre fini de valeurs de $\tilde{\alpha}$, puisque deux points de même degré de ramification au-dessus du même point α donnent la même chose).

Proposition 3. — *La métrique $\tilde{\mu}$ a les propriétés suivantes :*

- a) *Elle est à coefficient continu.*
- b) *Il existe un $\tilde{\lambda} > 1$ tel que $\|T_{\tilde{x}} \tilde{f}\|_{\tilde{\mu}} \geq \tilde{\lambda}$ pour tout $\tilde{x} \in Y'$.*
- c) *Tout point de $U \setminus \bigcap \overline{\Delta}_\alpha''$ a un voisinage connexe au-dessus duquel les applications de changement de feuillet sont des isométries. Pour chaque $\alpha \in A$, on peut trouver un nombre fini $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_r$ de composantes de $\pi^{-1}(\Delta_\alpha)$ telle que chaque composante de $\pi^{-1}(\Delta_\alpha)$ soit isométrique au-dessus de Δ_α à l'un des $\Delta_{\tilde{\alpha}_i}$.*

Tout cela résulte de la construction de $\tilde{\mu}$.

5. Cas sous-hyperbolique

Théorème 3. — *Si f est un polynôme sous-hyperbolique, J_f est de mesure nulle.*

Nous nous contentons d'indiquer les modifications à apporter aux démonstrations des théorèmes 1 et 2.

Soient $V \subset Y$ un ouvert et $g : V \rightarrow Y$ une application \mathbb{C} -analytique telle que V et $g(V)$ soient contenus dans les domaines de cartes de \mathcal{A} . On note alors $\text{dist}_V(g)$ la distorsion de l'expression de g dans ces cartes. Si on a le choix entre plusieurs cartes pour V ou $g(V)$, on prend le sup des distorsions des différentes expressions.

Soient $x \in Y$ et $r > 0$. S'il existe une carte $w : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de \mathcal{A} telle que $B(w(x), r) \subset w(\Omega)$, on pose $B(x, r) = w^{-1}(B(w(x), r))$. Si on a le choix, on choisit la carte induite par π (ou on prend l'intersection).

Soient $\Lambda \subset U$ un compact et V un ouvert de U contenu dans l'un des Δ_α .

On pose :

$$\tilde{d}_V(\Lambda) = \inf_{\tilde{\alpha} \in \pi^{-1}(\alpha)} d_{w_{\tilde{\alpha}}(\pi^{-1}(V))}(w_{\tilde{\alpha}}(\pi^{-1}(\Lambda))).$$

On choisit $b_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in Y' = \pi^{-1}(U')$, $B(x, b_0)$ soit défini et pour tout $n \geq 0$, $f^{-n}(B(x, b_0))$ soit contenu dans le domaine d'une carte de \mathcal{A} .

Avec ces conventions, la démonstration est analogue.

EXPOSÉ VI

POSDRONASVILI⁽¹⁾

0. Notations et introduction

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme de degré d tel que tout point critique soit prépériodique. On note C l'ensemble des points critiques de f , A l'ensemble fini $\bigcup_{n \geq 0} f^n(C)$, J et K l'ensemble de Julia et l'ensemble de Julia rempli, H l'arbre de Hubbard, *i.e.* l'enveloppe réglementaire de A dans K . Pour $\alpha \in A$, on note $\nu(\alpha)$ le nombre de brins de H en α , $\tau(\alpha)$ le degré de ramification de f en α (la multiplicité de α comme point critique est $\tau(\alpha) - 1$; on a $\tau(\alpha) = 1$ si $\alpha \in A \setminus C$). Les points de A sont appelés *points marqués*, en ajoutant les points de branchement de H , on obtient les *points remarquables*.

Nous retiendrons sur H la structure définie par les données suivantes :

- sa topologie,
- l'ordre cyclique des brins aux points de branchement (ce qui détermine la classe d'isotopie du plongement $H \rightarrow \mathbb{C}$),
- l'ensemble A des points marqués,
- la dynamique sur A , c'est-à-dire $f|_A : A \rightarrow A$,
- la fonction $r : A \rightarrow \mathbb{N}$ (si f est de degré 2, on a $r(\alpha) = 2$ si α est le point critique et $r(\alpha) = 1$ sinon).

Ces données constituent la *structure primaire*.

Nous allons montrer qu'un polynôme de la forme $z \mapsto z^2 + c$, tel que 0 soit prépériodique, est déterminé par son arbre muni de sa structure primaire.

La démonstration comprend deux parties, une première partie topologico-combinatoire et une deuxième partie analytique. La deuxième partie peut se faire aussi bien en degré d quelconque. Pour étendre la première partie, il faut définir sur l'arbre une *structure complémentaire*. On obtient alors le résultat suivant : un polynôme tel que tout point critique soit prépériodique est déterminé, à conjugaison affine près, par son arbre, équipé de sa structure primaire et de sa structure complémentaire.

⁽¹⁾Alias Flora Poil. Ce nom est un anagramme. Si vous trouvez de quoi, vous saurez quel jour ceci a été raconté la première fois.

I - Partie combinatoire

1. L'arbre H^1

On pose $H^1 = f^{-1}(H)$. Cet ensemble est aussi l'enveloppe réglementaire de $A^1 = f^{-1}(A)$ dans K . Les *points marqués* de H^1 sont les points de A^1 . Un point de H peut être marqué (resp. remarquable) dans H^1 sans l'être dans H . On définit de la même façon sur H^1 une structure primaire (on a $r(\alpha) = 0$ si $\alpha \in A^1 \setminus A$). En notant $\nu_1(\alpha)$ le nombre de brins de H^1 en α , on a, pour tout $\alpha \in A$:

$$\nu(\alpha) \leq \nu_1(\alpha) = r(\alpha) \cdot \nu(f(\alpha)).$$

Pour un polynôme de la forme $f : z \mapsto z^2 + c$, il est facile de reconstituer H^1 avec sa structure primaire.

Si T est un arbre et $F \subset T$ un ensemble fini, l'espace obtenu en *couplant* T suivant F est la réunion disjointe des fermetures connexes de $T \setminus F$.

Supposons f de degré 2, disons de la forme $z \mapsto z^2 + c$. Soit $a_0 = 0$ le point critique, et $a_i = f^i(a_0)$. On a $\nu(a_1) = 1$, d'où $\nu_1(a_0) = 2$. En coupant H^1 en a_0 , on obtient H_0^1, H_1^1 avec, disons, $\alpha_1 \in H_1^1$. L'application f induit un homéomorphisme de chacun des H_s^1 sur H , notons b_i^s l'image réciproque de a_i dans H_s^1 ($s = 0, 1$). On obtient ainsi un homéomorphisme $b_i^s \mapsto (a_i, s)$ de H^1 sur $H \times \{0, 1\} / (a_1, 0) \sim (a_1, 1)$. L'injection naturelle $\iota : A \rightarrow H^1$ est donnée par $\iota(a_i) = b_{i+1}^s$ avec $s = 1$ si a_i est du même côté de a_0 que a_1 dans H et $s = 0$ sinon. (Dans H^1 , on a $b_1^0 = b_1^1 = a_0$). Ceci détermine $\iota : H \rightarrow H^1$ à homotopie fixant les points remarquables près. Le point a_0 n'est pas un point de branchement dans H^1 , donc tout point de branchement est dans $H_0^1 \setminus b_1$ ou $H_1^1 \setminus b_1$, et l'ordre cyclique des brins est donné par celui des brins de H au point correspondant.

2. La structure complémentaire

Ce paragraphe n'a d'intérêt que pour $d \geq 3$. Nous allons ajouter à la structure primaire deux données complémentaires.

Soit $a \in A$. On a $\alpha \in \overset{\circ}{K}$ si et seulement si $(\exists n, k) f^{n+k}(\alpha) = f^n(\alpha)$ et $r(f^n(\alpha)) \geq 2$. Cela se lit donc sur la structure primaire de H .

Si $\alpha \in \overset{\circ}{K}$, les brins de H sont au voisinage de α des rayons internes de la composante U_α de $\overset{\circ}{K}$ contenant α . La *première donnée complémentaire* est la donnée, pour chaque $\alpha \in C \cap \overset{\circ}{K}$, des angles entre les brins de H en α comptés en tours, ce sont des éléments de $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ces angles déterminent les angles entre les brins en tout point de $A \cap \overset{\circ}{K}$. En effet, soit $\alpha \in A \cap \overset{\circ}{K}$, et n_0 le plus petit $n \geq 0$ tel que $f^{n_0}(\alpha) \in C$; si ξ et ξ' sont deux brins en α , leur angle est égal à celui de $f^{n_0}(\xi)$ et $f^{n_0}(\xi')$ en $f^{n_0}(\alpha)$. Ces

angles sont rationnels, avec un dénominateur qu'on peut estimer au vu de la structure primaire. La première donnée comporte donc une information finie.

Pour $\alpha \in A$, on appelle *bourgeons* en α les $r(\alpha)\nu(f(\alpha)) - \nu(\alpha)$ brins⁽²⁾ de H^1 en α qui ne sont pas des brins de H . Si $\tau(\alpha) = 1$, la façon dont les bourgeons s'insèrent dans l'ordre cyclique des brins de H en α est déterminée par la structure primaire. Si $\alpha \in C \cap \overset{\circ}{K}$, cette façon est déterminée par les angles entre les brins en α et en $f(\alpha)$.

La *deuxième donnée complémentaire* est constituée par la façon dont les bourgeons en α s'insèrent dans l'ordre cyclique des brins de H pour $\alpha \in C \cap J$.

3. Reconstitution de H^1 (degré $d \geq 3$)

Notons H^* la réunion de H et des bourgeons (représentés par de petits arcs, et soit $\Pi_{\sigma \in S} H_\sigma^*$ l'espace obtenu en coupant H^* suivant C . Pour tout $\sigma \in S$, posons $C_\sigma = H_\sigma^* \cap C$ et notons H_σ^1 la composante de H^1 coupé suivant C qui contient H_σ^* . L'espace H^1 est réunion des H_σ^1 .

Lemme. — *L'application f induit un homéomorphisme de H_σ^1 sur la composante H'_σ de H coupé suivant $f(C_\sigma)$ qui contient $f(H_\sigma^*)$.*

Démonstration. — L'application f est injective sur H_σ^1 , donc est un homéomorphisme de H_σ^1 sur son image qui est compacte. Elle induit donc un homéomorphisme de $H_\sigma^1 \setminus C_\sigma$ sur un fermé de $H \setminus f(C_\sigma)$. Comme elle est ouverte sur $H_\sigma^1 \setminus C_\sigma$, et que $H_\sigma^1 \setminus C_\sigma$ est connexe, ce fermé est une composante connexe, d'où le lemme. Cqfd.

On peut maintenant donner de H^1 la description suivante : H^1 s'obtient en recollant à H^* les H'_σ suivant les applications

$$\begin{array}{ccc} & i \rightarrow & H^* \\ H_\sigma^* & \nearrow & \\ & f \rightarrow & H'_\sigma \end{array}$$

Les espaces H^* , H_σ^* et H'_σ sont connus à partir de H avec sa structure primaire et ses données complémentaires, et l'application f est connue à homotopie fixant les points remarquables près.

La proposition suivante en résulte :

Proposition 1. — *Soient f et g deux polynômes de degré $d \geq 2$ tels que tout point critique soit prépériodique. Soit φ un homéomorphisme de H_f sur H_g respectant les structures primaires et les données complémentaires. Il existe alors un homéomorphisme unique φ_1 de H_f^1 sur H_g^1 , coïncidant avec φ sur A_f et tel que $g \circ \varphi_1 = \varphi \circ f$.*

⁽²⁾Les *branches* de H en α sont les composantes de H coupé en α . Les brins sont les germes des branches.

Compléments

1) On a $\varphi_1(H_f) = H_g$, et la restriction de φ_1 à H_f est homotope à φ parmi les homéomorphismes coïncidant avec φ sur les points remarquables de H_f .

2) L'application φ_1 respecte les structures primaires, et les angles aux points de $A^1 \cap \overset{\circ}{K}$.

Remarques

1) On ne peut en général avoir à la fois $g \circ \varphi_1 = \varphi \circ f$ et $\varphi_1|_{H_f} = \varphi$; il faut une homotopie d'un côté ou de l'autre. Nous avons choisi l'énoncé qui nous sera utile.

2) La proposition est vraie en degré $d = 2$ sans l'hypothèse sur les données complémentaires qui est automatique puisqu'elles n'apportent aucune information; cela résulte du §1.

4. Décoration des arbres

Nous allons maintenant, la saison s'y prête, transformer les arbres en arbres de Noël. Revenant à f , soit (U_i) la famille des composantes connexes de $\overset{\circ}{K}$; pour $\alpha \in A \cap \overset{\circ}{K}$, on notera U_α la composante de centre α . Soit (ζ_i) la famille de cartes \mathbb{C} -analytiques $\zeta_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ telle que l'expression de f dans ces cartes soit $\zeta_i \mapsto \zeta_{f^*(i)} = \zeta_i^{r_i}$. Pour $z \in U_i$, on pose $\rho(z) = |\zeta_i(z)|$.

L'arbre décoré $\left| \frac{\circ}{\mathfrak{A}} \right|$ est la réunion de H et des disques $N_\alpha = \{z \in U_\alpha \mid \rho(z) \leq 1/2\}$ pour $\alpha \in A \cap \overset{\circ}{K}$.

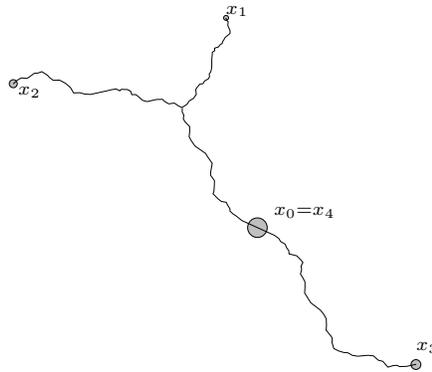


FIGURE 1. Un arbre décoré.

5. Construction d'homéomorphismes

Proposition 2. — *Sous les hypothèses de la proposition 1, on peut trouver deux homéomorphismes $\psi_0, \psi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tels que :*

a) $\psi_0(H_f) = H_g$ et $\psi_0|_{H_f}$ est homotope à φ parmi les homéomorphismes $H_f \rightarrow H_g$ qui coïncident avec φ sur A_f .

b) ψ_0 induit un isomorphisme \mathbb{C} -analytique de $\overset{\circ}{N}_\alpha^f$ sur $\overset{\circ}{N}_{\varphi(\alpha)}^g$ pour $\alpha \in A_f \cap \overset{\circ}{K}_f$.

c) $g \circ \psi_1 = \psi_0 \circ f$.

d) ψ_1 est homotope à ψ_0 parmi les homéomorphismes $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ induisant un homéomorphisme $H_f \rightarrow H_g$, et coïncidant avec ψ_0 sur $\bigcup_{\alpha \in A_f \cap \overset{\circ}{K}_f} N_\alpha \cup A_f$.

Démonstration

α) Construction de ψ_0 . On peut modifier φ et φ_0 de façon que $\rho_g(\varphi_0(z)) = \rho_f(z)$ pour $z \in H_f \cap N_\alpha$, $\alpha \in A_f \cap \overset{\circ}{K}_f$. Sur chaque brin $H_f \cap N_\alpha$, l'expression de φ dans les cartes ζ_α^f et $\zeta_{\varphi(\alpha)}^g$ est de la forme $\zeta \mapsto \lambda\zeta$ avec $|\lambda| = 1$, et la condition de préserver la première donnée complémentaire entraîne que λ est le même λ_α pour les différents brins issus d'un $\alpha \in A_f \cap \overset{\circ}{K}_f$ donné. On peut alors définir φ_0 sur chaque N_α par $\zeta \mapsto \lambda_\alpha\zeta$. On obtient ainsi un difféomorphisme $\varphi_0 : \mathbb{H}_f \rightarrow \mathbb{H}_g$.

Soit τ_f un isomorphisme de $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{H}_f$, prolongé de façon continue à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$, et définissons de même τ_g . Du fait que φ_0 préserve l'ordre cyclique aux points de branchement, il résulte qu'il existe un homéomorphisme $h : S^1 \rightarrow S^1$ tel que $\varphi_0(\tau_f(u)) = \tau_g(h(u))$ pour $u \in S^1$. On peut alors prolonger φ_0 en un homéomorphisme $\psi_0 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{H}_f$ par $\psi_0(\tau_f(ru)) = \tau_g(rh(u))$.

β) Construction de ψ_1 au voisinage de H_f^1 . — Sur H_f , ψ_1 est donné par la proposition 1.

Pour chaque point critique α de f , soient V_α^f et W_α^f des voisinages de α et $f(\alpha)$ homéomorphes à \mathbb{D} , tels que f induise un revêtement de degré $r(\alpha) : V_\alpha^f \setminus \{\alpha\} \rightarrow W_\alpha^f \setminus \{f(\alpha)\}$. Posons $W_\alpha^g = \psi_0(W_\alpha^f)$, et soit V_α^g un voisinage de $\varphi(\alpha)$ tel que g induise un revêtement $V_\alpha^g \setminus \{\varphi(\alpha)\} \rightarrow W_\alpha^g \setminus \{\varphi(f(\alpha))\}$ de degré $r_g(\varphi(\alpha)) = r_f(\alpha)$. On peut relever $\psi_0 : W_\alpha^f \setminus \{f(\alpha)\} \xrightarrow{\sim} W_\alpha^g \setminus \{\varphi(f(\alpha))\}$ en un homéomorphisme $\psi_1^\alpha : V_\alpha^f \setminus \{\alpha\} \rightarrow V_\alpha^g \setminus \{\varphi(\alpha)\}$, et grâce à l'hypothèse que f préserve les données complémentaires, on peut le faire, de façon unique, en prolongeant ψ_1 déjà défini sur les brins de H_f^1 en α .

Pour chaque point $x \in H_f^1$ non critique, on peut trouver des voisinages $V_x^f, W_x^f, V_x^g, W_x^g$ de $x, f(x), \psi_0(x), \psi_0(f(x))$ tels que l'on ait des homéomorphismes

$$V_x^f \xrightarrow{f} W_x^f \xrightarrow{\psi_0} W_x^g \xleftarrow{g} V_x^g,$$

ce qui permet de définir

$$\psi_1^x = g^{-1} \circ \psi_0 \circ f : V_x^f \longrightarrow V_x^g.$$

Tous ces germes se recollent (on peut invoquer un lemme de Godement) en un homéomorphisme ψ_1^V d'un voisinage V^f de H_f^1 sur un voisinage V^g de H_g^1 , tel que $g \circ \psi_1 = \psi_0 \circ f$.

γ) *Extension de ψ_1 à \mathbb{C} .* — Les applications f et g induisent des revêtements de degré d (c'est le même car c'est $\sum(r(\alpha) - 1) + 1$)

$$f : \mathbb{C} \setminus H_f^1 \longrightarrow \mathbb{C} \setminus H_f, \quad g : \mathbb{C} \setminus H_g^1 \longrightarrow \mathbb{C} \setminus H_g.$$

Ces quatre espaces sont homéomorphes à une couronne.

Soit $x \in V^f \setminus H_f^1$. Il existe un relèvement unique $\psi_1^\infty : \mathbb{C} \setminus H_f^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus H_g^1$ de $\psi_0 : \mathbb{C} \setminus H_f \rightarrow \mathbb{C} \setminus H_g$ tel que $\psi_1^\infty(x) = \psi_1^V(x)$. On peut supposer V^f connexe et de la forme $f^{-1}(W^f)$, où W^f est un voisinage connexe de H^f . Alors, ψ_1^V et ψ_1^∞ induisent deux relèvements de $\psi_0 : W^f \setminus H_f \rightarrow W^g \setminus H_g$, qui coïncident en x ; donc sur $V^f \setminus H_f^1$. Alors, ψ_1^V et ψ_1^∞ se recollent en un homéomorphisme $\psi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Pour chaque $\alpha \in A_f \cap \overset{\circ}{K}_f$, l'expression de ψ_0 sur N_α dans les cartes ζ_α^f et ζ_α^g est de la forme $\zeta \mapsto \lambda_\alpha \zeta$ avec $|\lambda_\alpha| = 1$, et l'expression de ψ_1 sera de la forme $\zeta \mapsto \lambda_\alpha^1 \zeta$ avec $(\lambda_\alpha^1)^{r_\alpha} = \lambda_{f(\alpha)}$. Mais (à part le cas trivial où f serait un monôme et $H_f = \{\alpha\}$), il y a au moins un brin de H_f en α , sur lequel ψ et ψ_1 coïncident. On a donc nécessairement $\lambda_\alpha^1 = \lambda_\alpha$. Il en résulte que ψ coïncide avec ψ_0 sur $|\frac{\partial}{\partial f}|_f$.

δ) *Homotopie de ψ_0 à ψ_1 .* — Reprenons τ_f et τ_g qui ont servi en (α) . Soit $(\psi_t)_{t \in [0,1]}$ une homotopie entre ψ_0 et ψ_1 parmi les homéomorphismes $|\frac{\partial}{\partial f}|_f \rightarrow |\frac{\partial}{\partial g}|_g$ qui coïncident avec ψ_0 sur $X = A_f \cup \bigcup_\alpha N_\alpha^f$. Pour tout t , il existe un homéomorphisme unique $h_t : S^1 \rightarrow S^1$ tel que $\psi_t \circ \tau_f = \tau_g \circ h_t$, qui coïncide avec $h_0 = h$ sur $\tau_f^{-1}(X)$. On peut étendre cette homotopie à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ en vertu du lemme suivant, auquel on se ramène par inversion :

Lemme. — Soient φ_0 et φ_1 deux homéomorphismes $\overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ et (h_t) une homotopie entre $\varphi_0|_{S^1}$ et $\varphi_1|_{S^1}$. Il existe alors une homotopie (φ_t) entre φ_0 et φ_1 induisant (h_t) sur le bord.

Démonstration. — En remplaçant φ_1 par $\varphi_1 \circ \varphi_0^{-1}$ et h_t par $h_t \circ h_0^{-1}$, on se ramène au cas où $\varphi_0 = 1$. Posons $\tilde{h}_t(r \cdot u) = r \cdot h_t(u)$ pour $r \in [0, 1]$. En remplaçant φ_1 par $\varphi_1 \circ \tilde{h}$, on se ramène au cas où $h_t = I$ pour tout t . On peut alors définir φ_t par $\varphi_t(x) = x$ si $|x| \geq t$ et $\varphi_t(x) = t\varphi_1(\frac{x}{t})$ pour $|x| \leq t$. Cqfd.

Ceci achève la démonstration de la proposition 2.

Remarque. — On a du choix pour ψ_0 , mais la donnée de ψ_0 détermine ψ_1 .

6. Ajustement à l'infini

Choisissons R et R' tels que $R > R' > 1$. Soit $\zeta_\infty^f : \mathbb{C} \setminus K_f \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ un isomorphisme tel que l'expression de f dans cette carte soit $\zeta \mapsto \zeta^d$, et posons $N_\infty^f = \{z \in \mathbb{C} \setminus K_f \mid R \leq |\zeta_\infty^f(z)|\}$. Définissons de même ζ_∞^g et $N_\infty^g, N_\infty^{f'}$ et $N_\infty^{g'}$.

Proposition 3. — Dans la proposition 2, on peut choisir ψ_0 de façon que $\psi_1 = \psi_0$ sur N_∞ , et que ψ_1 soit homotope à ψ_0 parmi les homéomorphismes $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui coïncident avec ψ_0 sur $A_f \cup \bigcup_{\alpha \in A_f \cap \overset{\circ}{K} \cup \{\infty\}} N_\alpha$.

Démonstration. — On peut modifier ψ_0 sur N_∞^f de façon que son expression sur N_∞^f devienne $\zeta \mapsto \lambda\zeta$ dans les cartes $\zeta_\infty^f, \zeta_\infty^g$, avec $|\lambda| = \infty$. L'expression de ψ_1 sur N_∞^f est alors de la forme $\zeta \mapsto \lambda_1\zeta$, où $\lambda_1^d = \lambda$.

Choisissons dans ∂H_f un point x qui soit un point remarquable de H_f ou un point de l'un des ∂N_α . On a donc $\psi_0(x) = \psi_1(x)$, et même $\psi_t(x) = \psi_0(x)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Soient $x' \in H_f$ un autre point remarquable, $y \in N_\infty^f$ et η un chemin de x à y tel que $\eta(t) \in \mathbb{C} \setminus H_f$ pour $t > 0$. Soit $\tilde{\eta}$ un chemin de $\psi_0(y)$ à $\psi_1(y)$, homotope dans $\mathbb{C} \setminus \psi_0(x')$ au chemin concaténant $\psi_0(\eta)$ renversé avec $\psi_1(\eta)$. En suivant l'argument de ζ le long de $\tilde{\eta}$, on obtient un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 = \lambda_0 e^{2i\pi\theta}$.

Lemme

- a) On a $\psi_1 = \psi_0$ sur N_∞^f si $\theta \in \mathbb{Z}$.
- b) Pour qu'on puisse modifier l'homotopie de ψ_0 à ψ_1 de façon que $\psi_t = \psi_0$ sur N_∞^f pour tout t , il faut et il suffit que $\theta = 0$.

Démonstration. — La partie a) est triviale. La partie b) résulte de la description du π_0 du groupe des homéomorphismes d'une couronne fermée induisant l'identité sur le bord. Cqfd.

Fin de la démonstration de la proposition 3. — Faisons varier ψ_0 en fonction d'un paramètre s de façon que $\lambda_0(s) = \lambda_0(0)e^{2i\pi s}$. On a alors $\theta(s) = \theta(0) + (\frac{1}{d} - 1)s$. Pour $s = \frac{d}{d-1}\theta(0)$, on a $\theta(s) = 0$, et ψ_0 satisfait aux propriétés requises. Cqfd.

II - Partie Analytique

1. Rappel sur les applications quasi-conformes

Si U est un ouvert de \mathbb{R}^n , l'espace de Sobolev $\mathcal{H}^1(U)$ est l'espace des fonctions de $L^2(U)$ dont les dérivées premières au sens des distributions sont dans $L^2(U)$. On note $\mathcal{H}_{\text{loc}}^1(U)$ l'espace des fonctions telles que $\forall x \in U, \exists V$ voisinage de $x, f|_V \in \mathcal{H}^1(V)$, et $\mathcal{CH}_{\text{loc}}^1(U)$ l'espace $\mathcal{C}(U) \cap \mathcal{H}_{\text{loc}}^1(U)$. On note $\mathcal{CH}_{\text{loc}}^1(U, \mathbb{R}^p)$ l'espace des $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ dont les coordonnées sont dans $\mathcal{CH}_{\text{loc}}^1(U)$. Si U est un ouvert de \mathbb{C} , on définit $\mathcal{CH}_{\text{loc}}^1(U)$ en oubliant la structure complexe et identifiant \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 .

Soient U et V deux ouverts de \mathbb{C} et $f : U \rightarrow V$ une application. On dit que f est *quasi-conforme* si $f \in \mathcal{CH}_{\text{loc}}^1(U; \mathbb{C})$ et s'il existe un $m < 1$ tel que, pour presque tout $x \in U$, on ait :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x) \right| \leq m \left| \frac{\partial f}{\partial z}(x) \right|.$$

Cette inégalité signifie que $T_x f$ (qui est définie pour presque tout x) préserve l'orientation et transforme un cercle en une ellipse dont le rapport des axes est majoré par

$M = (1 + m)/(1 - m)$. Le plus petit M pour lequel cela ait lieu est le *rapport de dilatation* de f .

Si f est un homéomorphisme quasi-conforme de U sur V , f^{-1} est quasi-conforme avec même rapport de dilatation, et on a :

$$\|Df\|_2 = 2 \int_U \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2 \leq (M + 1) \text{aire}(V).$$

Terminons par deux remarques qui nous serviront.

1) Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{CH}^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}$ ouvert. Si $f_n \rightarrow f$ uniformément et $\|Df_n\|_2 \leq k$ (indépendant de n), alors $f \in \mathcal{CH}^1(U)$ et $\|Df\|_2 \leq k$. En effet

$$\|Df\|_2 \leq k \iff \forall (u, v) \in \mathcal{C}_{\text{comp}}^\infty(U) \text{ avec } \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 \leq 1, \\ \left| \int_U f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right| \leq k.$$

2) Si $f \in \mathcal{CH}^1(U; \mathbb{C})$ avec $U \subset \mathbb{C}$ et $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ presque partout, f est holomorphe.

2. Construction de Φ_0 et Φ_1

Proposition 4. — *Sous les hypothèses de la proposition 1, on peut trouver deux homéomorphismes Φ_0 et $\Phi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tels que :*

- 1) Φ_0 est un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 .
- 2) Φ_0 induit un isomorphisme \mathbb{C} -analytique de \mathring{N}_α^f sur \mathring{N}_α^g pour $\alpha \in A_f \cap \mathring{K}_f \cup \{\infty\}$.
- 3) $g \circ \Phi_1 = \Phi_0 \circ f$.
- 4) Φ_1 est quasi-conforme.
- 5) Φ_1 est homotope à Φ_0 parmi les homéomorphismes $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ coïncidant avec Φ_0 sur $N_f = A_f \cup \bigcup_{\alpha \in A_f \cap \mathring{K}_f \cup \{\infty\}} N_\alpha^f$.

[Par rapport à la proposition 3, on a perdu $\psi_0(H_f) = H_g$, et on a gagné Φ_0 de classe \mathcal{C}^1 .]

Démonstration. — Soient ψ_0 et $\psi_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ des homéomorphismes satisfaisant aux conditions des propositions 2 et 3, Φ_0 un difféomorphisme de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{C} homotope à ψ_0 parmi les homéomorphismes coïncidant avec ψ_0 sur N_f et η_0 une homotopie. Les applications $f : \mathbb{C} \setminus A_f^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus A_f$ et $g : \mathbb{C} \setminus A_g^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus A_g$ sont des revêtements. L'application $\psi_1 : \mathbb{C} \setminus A_f^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus A_g^1$ est un relèvement de $\psi_0 : \mathbb{C} \setminus A_f \rightarrow \mathbb{C} \setminus A_g$; on peut donc relever η_0 en une homotopie η_1 de ψ_1 à un difféomorphisme $\Phi_1 : \mathbb{C} \setminus A_f^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus A_g^1$, qui se prolonge en un homéomorphisme $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Le difféomorphisme Φ_0 est quasi-conforme puisque \mathcal{C}^1 est holomorphe en dehors d'un compact. Il résulte de c) que Φ_1 est quasi-conforme de même rapport. L'homotopie η_0 est constante sur h_f , donc η_1 est constante sur $N_f^1 = f^{-1}(N_f)$, qui contient N_f . On a les homotopies suivantes, constantes sur $N_f : \Phi_0 \simeq \psi_0 \simeq \psi_1 \simeq \Phi_1$, d'où une homotopie h_0 de Φ_0 à Φ_1 constante sur N_f . Cqfd.

3. La suite (Φ_n)

À partir de Φ_0, Φ_1 et h_0 , on construit par récurrence, pour chaque n , un homéomorphisme $\Phi_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ coïncidant avec Φ_0 sur N_f , et une homotopie h_n de Φ_n à Φ_{n+1} . L'homotopie h_n s'obtient en relevant h_{n-1} entre Φ_{n-1} et $\Phi_n : \mathbb{C} \setminus A_f \rightarrow \mathbb{C} \setminus A_g$ aux revêtements $\mathbb{C} \setminus A_f^1$ et $\mathbb{C} \setminus A_g^1$ à partir de Φ_n ; elle détermine Φ_{n+1} . On a donc $g \circ \Phi_{n+1} = \Phi_n \circ f$ pour tout n , et l'homotopie h_n est constante sur $N_f^n = f^{-n}(N_f)$.

En particulier, Φ_n coïncide avec Φ_{n+1} sur N_f^n , et la suite (Φ_n) est localement stationnaire sur l'ouvert $\bigcup N_f^n$. Or cet ouvert est $\mathbb{C} \setminus J_f$, car tout point de $\mathbb{C} \setminus J_f$ est attiré par un cycle de $A_f \cap \overset{\circ}{K}_f$ ou par ∞ .

Proposition 5. — *La suite (Φ_n) converge uniformément sur \mathbb{C} .*

Démonstration. — Le polynôme g est sous-hyperbolique. Soient Ω un voisinage ouvert de J_g , μ une métrique riemannienne admissible sur Ω et $\lambda > 1$, tels que $f^{-1}(\Omega) \subset \Omega$ et que $\|T_x g\|_\mu \geq \lambda$ pour tout $x \in g^{-1}(\Omega)$. Soit n_0 tel que $\mathbb{C} \setminus N_g^{n_0} \subset \Omega$. Pour $n \geq n_0$, posons $\rho_n = \sup_{x \in \mathbb{C} \setminus N_f^{n_0}} d_\mu(\Phi_n(x), \Phi_{n+1}(x))$ (d_μ désignant la longueur pour μ du plus court chemin de $\Phi_n(x)$ à $\Phi_{n+1}(x)$ dans Ω , dans la classe du chemin donné par h_n). On a $\rho_{n+1} \leq \frac{1}{\lambda} \rho_n$. Il en résulte que la suite (Φ_n) converge uniformément pour la distance définie par μ . Comme elle est constante en dehors d'un compact contenu dans Ω et que la distance d_μ définit la même topologie que la distance ordinaire, (Φ_n) converge uniformément sur \mathbb{C} pour la distance ordinaire. Cqfd.

4. Holomorphie de Φ

Notons Φ la limite des Φ_n . C'est naturellement une application continue. Pour chaque n , Φ_n est holomorphe sur N_f^n . Par suite, Φ est holomorphe sur $\bigcup N_f^n = \mathbb{C} \setminus J_f$. On sait que J_f et J_g sont de mesure nulle.

Remarque. — Soient J_1 et J_2 deux fermés de mesure nulle, $\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un homéomorphisme tel que $\Psi(J_1) = J_2$, et Ψ holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus J_1$. Cela n'entraîne pas que Ψ est holomorphe.

Contre-exemple. — Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue croissante, constante sur chaque composante du complémentaire d'un Cantor de mesure nulle, mais cependant non constante. Alors, $\Psi : (x + iy) \mapsto x + i(y + u(x))$ donne un contre-exemple.

Cependant :

Proposition 6. — *L'application Φ est holomorphe.*

Démonstration. — Φ_0 et Φ_1 sont quasi-conformes de rapport M . Il en résulte que tous les Φ_n sont quasi-conformes de rapport M , puisque $g_n \circ \Phi_{n+1} = \Phi_n \circ f$, avec f et g holomorphes.

On a $\|D\Phi_n\|_{L^2(\mathbb{C}\setminus N_f)} \leq (1+M) \text{aire}(\mathbb{C}\setminus N_g)$, pour tout n . Il en résulte comme on l'a remarqué à la fin du §1, que Φ est de classe \mathcal{CH}^1 sur $\mathbb{C}\setminus N_f$. Comme $\partial\Phi/\partial\bar{z} = 0$ presque partout, l'application Φ est holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus N_f$. Elle est aussi holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus J$, elle l'est donc sur \mathbb{C} . Cqfd.

Corollaire. — Φ est affine.

En effet, Φ est propre de degré 1.

5. Conclusion

Théorème. — Sous les hypothèses de la proposition 1, f et g sont conjuguées par une application affine.

(3)

Corollaire 1. — Soient $f : z \mapsto z^2 + c_1$ et $g : z \mapsto z^2 + c_2$ deux polynômes de degré 2. S'il existe un homéomorphisme de H_f sur H_g préservant la structure primaire, on a $c_1 = c_2$.

Corollaire 2. — Soient c_1 et c_2 deux nombres réels, tels que 0 soit périodique de même période k pour $f : z \mapsto z^2 + c_1$ et $g : z \mapsto z^2 + c_2$. On suppose que l'ordre induit par celui de \mathbb{R} sur $\{0, f(0), \dots, f^{k-1}(0)\}$ et $\{0, g(0), \dots, g^{k-1}(0)\}$ coïncident. Alors, $c_1 = c_2$.

Ce résultat était connu sous le nom de conjecture de Métropolis-Stein-Stein.

Remarque. — On peut donner des variantes de la condition sur les données complémentaires. Je pense qu'une variante possible serait de compléter l'arbre en adjoignant à A les points d'argument externe de la forme $p/(d-1)$ (points fixes), ou bien p/d (peut-être faut-il tous les $p/d(d-1)$).

⁽³⁾Thurston a démontré une version plus puissante de ce théorème, valable pour les fractions rationnelles post-critiquement finies de degré quelconque. Il donne notamment une caractérisation topologique de telles fractions rationnelles. Le seul cas où des fractions rationnelles post-critiquement finies peuvent être topologiquement conjuguées sans être conjuguées par une transformation de Moebius, est le cas des exemples de Lattès.

EXPOSÉ VII

ARGUMENTS EXTERNES DANS LES ENSEMBLES DE JULIA

1. Rappels et introduction

Si $K \subset \mathbb{C}$ est un compact connexe plein localement connexe, la représentation conforme $\varphi_K^{-1} : \mathbb{C} \setminus \overline{D}_{r(k)} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus K$ tangente à l'identité en ∞ admet un prolongement continu à $\mathbb{C} \setminus D_r$, d'où une application continue $\gamma_k : \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \partial K$, surjective, que nous appelons le *lacet de Carathéodory* de K . Pour $x \in \partial K$, les éléments de $\gamma_K^{-1}(x)$ sont appelés les *arguments externes* de x .

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme monique de degré $d \geq 2$ tel que tout point critique soit prépériodique. Alors, K_f est un compact connexe plein, localement connexe ; et le lacet de Carathéodory $\gamma_f : \mathbb{T} \rightarrow J_f$ satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f(\gamma_f(t)) = \gamma_f(d \cdot t).$$

Nous allons indiquer comment déterminer les arguments externes de certains points de J_f . Nous nous intéresserons particulièrement aux polynômes quadratiques $f_c : z \mapsto z^2 + c$, car nous verrons que, dans le cas où 0 est strictement prépériodique pour f_c , les arguments externes de c dans K_c sont aussi (en un certain sens car on ne sait pas que M est localement connexe) les arguments externes de c dans M . Il y a aussi un énoncé concernant les points c tels que 0 soit périodique (un peu plus compliqué bien sûr puisqu'alors $c \in \overset{\circ}{K}_c$ et $c \in \overset{\circ}{M}$: il y a un jeu entre le centre et la racine des composantes de $\overset{\circ}{M}$ et de $\overset{\circ}{K}_c$).

2. Accès

Soit K un compact plein connexe et localement connexe, muni d'un centre pour chaque composante de $\overset{\circ}{K}$. Soient $H \subset K$ un arbre fini réglementaire, x un point de $H \cap \partial K$, et ν le nombre de brins de H en x . On appelle *accès* à x (relativement à H) les bouts en x de $\mathbb{C} \setminus H$, c'est-à-dire les éléments de

$$\varprojlim_{U \text{ voisinage de } x} \pi_0(U \setminus H).$$

En termes plus concrets, soit Δ un disque centré en x , ne contenant pas d'autre point remarquable de H et soient $[x, y_1]_K, \dots, [x, y_\nu]_K$ les brins de H en x , arrêtés à leur premier point de rencontre avec $\partial\Delta$. Les accès à x sont les ν composantes connexes de $\Delta \setminus ([x, y_1]_K \cup \dots \cup [x, y_\nu]_K)$. Tout argument externe t de x détermine un accès à x : c'est la composante où se trouve $\mathcal{R}(K, t)$ au voisinage de x .

Proposition 1. — *Chaque accès à x correspond à au moins un argument externe de x .*

Démonstration. — Pour $r \geq r(K)$ (rayon de capacité), notons γ_r le lacet $t \mapsto \varphi_K^{-1}(re^{2i\pi t})$. Soit V un accès à x compris entre 2 brins $[x, y_i]$ et $[x, y_{i+1}]$. On a $V \cap \mathbb{C} \setminus K \neq \emptyset$, sinon $[x, y_i]$ et $[x, y_{i+1}]$ seraient dans l'adhérence d'une même composante de $\overset{\circ}{K}$. Cette propriété subsiste si on remplace Δ par un disque plus petit. Par suite, on peut trouver une suite strictement décroissante r_n tendant vers $r(K)$, et pour tout n un t_n tel que $\gamma_{r_n}(t_n) \rightarrow x$. Comme \mathbb{T} est compact, quitte à extraire une suite, on peut supposer que la suite (t_n) a une limite θ . Comme $(r, t) \rightarrow \gamma_r(t)$ est continue sur $[r(K), +\infty[\times \mathbb{T}$, on a $\gamma_{r(K)}(\theta) = x$, et θ est un argument externe de x . Montrons que l'accès à x défini par θ est V . Soit ρ le rayon de Δ . Si n est assez grand, t_n est assez voisin de θ pour que $|\gamma_r(t_n) - \gamma_r(t')| < \rho/2$ pour tout $r \in [r(K), r_0]$ et tout t' entre t_n et θ , et de plus $|\gamma_r(t_n) - x| < \rho/2$. Cela entraîne que $\gamma_{r_n}(\theta)$ se trouve dans la même composante de $\Delta \setminus ([x, y_i]_K \cup [x, y_{i+1}]_K)$ que $\gamma_{r_n}(t_n)$, donc dans V . Cqfd.

3. Arbre augmenté

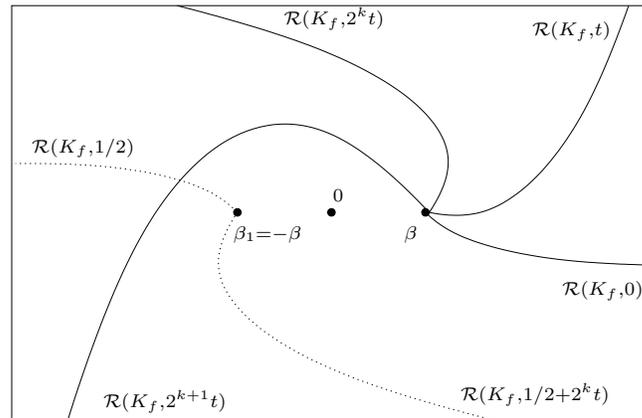
On pose $\beta = \gamma_f(0)$. C'est un point fixe, répulsif puisqu'il appartient à J_f et que f est sous-hyperbolique. Pour $i \in \mathbb{Z}/(d)$, on pose $\beta_i = \gamma(i/d)$. On peut montrer que $f^{-1}(\beta) = \{\beta_i\}_{i \in \mathbb{Z}/(d)}$ (exercice).

On appelle *arbre augmenté* l'enveloppe réglementaire \widehat{H} de $\widehat{A} = A \cup \{\beta_i\}_{i \in \mathbb{Z}/(d)}$. Cet arbre est muni de sa *structure primaire* définie par sa topologie, l'ordre cyclique des brins aux points de branchement, la dynamique sur les points de \widehat{A} (points marqués) ainsi que le degré de ramification aux points de \widehat{A} .

En degré 2, nous allons voir qu'on peut reconstituer \widehat{H} à partir de H .

Lemme 1. — *Si $d = 2$, le point β n'a pas d'autre argument externe que 0.*

Démonstration. — On peut supposer f de la forme $z \mapsto z^2 + c$. Alors, $\beta_1 = -\beta$, et on a $\beta_1 \neq \beta$, car sinon on aurait $\beta = 0$, donc 0 point fixe, $c = 0$ et $\beta = 1$ d'où $1 = 0$. Soit t un autre argument externe de β . Quitte à conjuguer, on peut supposer $t \in]0, 1/2[$, qu'on relève dans \mathbb{R} . Soit k tel que $2^k t < 1/2 < 2^{k+1} t$. On a : $0 < 2^k t < 1/2 < 2^{k+1} t < 1/2 + 2^k t < 1$. Les rayons externes aboutissent en β_1 . Alors, $\mathcal{R}(K_f, 0) \cup \mathcal{R}(K_f, 2^{k+1} t)$ et $\overline{\mathcal{R}}(K_f, 1/2) \cup \overline{\mathcal{R}}(K_f, 1/2 + 2^k t)$ sont des courbes disjointes, ce qui est incompatible avec la disposition de leurs asymptotes. Cqfd.



Corollaire. — β est une extrémité de \widehat{H} .

Remarque. — Le lemme 3 et son corollaire ne s'étendent pas à $d > 2$: voici l'ensemble de Julia de $z^3 + \frac{3}{2}z$:

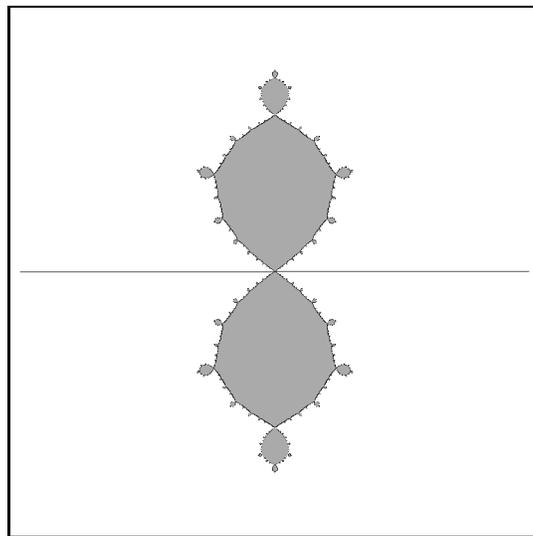


FIGURE 1. L'ensemble de Julia rempli de $z \mapsto z^3 + \frac{3}{2}z$ et les deux rayons externes $\mathcal{R}(K_f, 0)$ et $\mathcal{R}(K_f, 1/2)$ qui aboutissent tous deux au même point fixe : 0.

Supposons maintenant que $d = 2$, f de la forme $z \mapsto z^2 + c$, et mettons \widehat{H} sous la forme $\widehat{H}_+ \cup \widehat{H}_-$ avec $\widehat{H}_+ \cap \widehat{H}_- = \{0\}$ et $c = f(0) \in \widehat{H}_+$. Notons α l'autre point fixe.

Lemme 2. — On a $\beta \in H_-$ et $\alpha \in H_+$.

Démonstration

a) $\beta \in H_-$: Supposons d'abord que 0 est strictement prépériodique, donc $\overset{\circ}{K} = \emptyset$ et $c \in J$. Soit θ un argument externe de c . Alors, $\mathcal{R}(K_f, \theta/2)$ et $\mathcal{R}(K_f, \theta/2 + 1/2)$ aboutissent en 0, car c'est le seul point de $f^{-1}(c)$. Les courbes

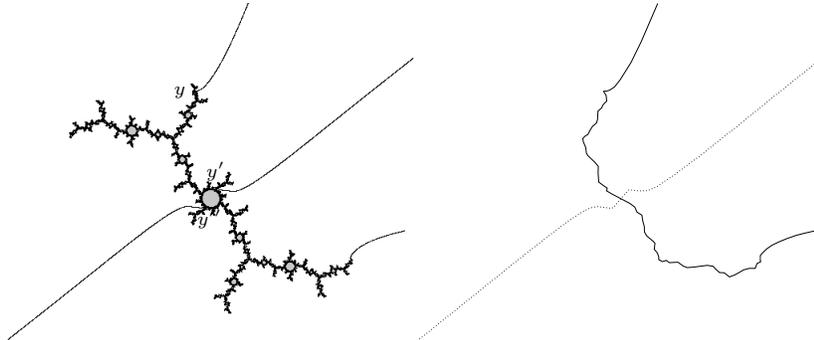
$$\mathcal{R}(K_f, 0) \cup [\beta, c]_K \cup \mathcal{R}(K_f, \theta) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{R}}(K_f, \theta/2) \cup \overline{\mathcal{R}}(K_f, \theta/2 + 1/2)$$

sont obligées de se couper à cause de la disposition des asymptotes, et elles ne peuvent se couper qu'en 0, d'où $0 \in [\beta, c]_K$.

Si 0 est prépériodique avec $c \neq 0$, 0 et c sont dans $\overset{\circ}{K}$, notons U_0 et U_c les composantes connexes de $\overset{\circ}{K}$ contenant 0 et c respectivement. Soient y un point de ∂U_c n'appartenant pas à \widehat{H} et θ un argument externe de y . Les points d'aboutissement y' et y'' de $\mathcal{R}(K_f, \theta/2)$ et de $\overline{\mathcal{R}}(K_f, \theta/2 + 1/2)$ sont les images réciproques de y , ils appartiennent à $\partial U_0 \setminus \widehat{H}$. Les courbes

$$\mathcal{R}(K_f, \theta) \cup [y, \beta] \cup \mathcal{R}(K_f, 0) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(K_f, \theta/2) \cup [y', y''] \cup \mathcal{R}(K_f, \theta/2 + 1/2)$$

se croisent nécessairement à cause de la disposition de leurs asymptotes, et ne peuvent se rencontrer qu'en 0, d'où $0 \in [y, \beta]$, et $0 \in [y', y'']$.



Reste le cas $c = 0$ où $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (il faut poser $\widehat{H}_+ = [-1, 0]$ et $\widehat{H}_- = [0, 1]$). Le cas $c = 0$ est trivial.

b) Définissons $\pi_+ : H \rightarrow H_+$ par $\pi_+(x) = x$ pour $x \in H_+$ et $\pi_+(x) = 0$ pour $x \in H_-$. L'application $\pi_+ \circ f : H \rightarrow H$ a un point fixe d'après le théorème de Lefschetz. Si $c \neq 0$ ce n'est pas 0, c'est donc un point fixe de f , qui n'est pas β , qui est donc α , et $\alpha \in H_+$. Cqfd.

Indiquons maintenant comment on reconstitue \widehat{H} , connaissant H . On commence par reconstituer $H^1 = f^{-1}(H)$ en recollant deux copies H_+^1 et H_-^1 de H par leur point c , comme indiqué dans l'exposé précédent. L'application f induit une injection : $[\beta, 0]_K \rightarrow [\beta, c]_K$; notons g l'application inverse : $[\beta, c]_K \rightarrow [\beta, 0]_K$, et posons $z_i = g^i(c)$, de sorte que $z_1 = 0$, $z_i \in [\beta, c]_K$ pour $i \geq 1$. Tant que $z_i \in H$, le point z_{i+1} est l'image réciproque de z_i dans H_+^1 , donc on connaît sa position combinatoire connaissant celle de z_i . On peut ainsi déterminer $i^* = \sup\{i \mid z_i \in H\}$, la position combinatoire de z_i dans H pour $i \leq i^*$, et, si $i^* < \infty$, la position de z_{i^*+1} dans H^1 . On a $i^* = \infty$ si et seulement si $\beta \in H$, *i.e.* s'il existe un point fixe dans H_- , et dans ce cas $\widehat{H} = H$. Sinon, on a un homéomorphisme de \widehat{H} sur l'enveloppe dans H_1 de $H \cup \{z_{i^*+1}, -z_{i^*+1}\}$ qui coïncide avec l'identité sur H , applique β sur z_{i^*+1} et $\beta_1 = -\beta$ sur $-z_{i^*+1}$. Cet homéomorphisme est compatible avec l'ordre des brins aux points de branchement.

Arnaud n'est pas d'accord

4. Calcul des arguments externes

Soient f un polynôme monique de degré $d \geq 2$ tel que tout point critique soit prépériodique, $X \subset \mathbb{C}$ un ensemble fini tel que $f(X) \subset X$, contenant les points critiques et les $(\beta_i)_{i \in \mathbb{Z}/(d)}$, et T l'enveloppe réglementaire de X dans K_f (par exemple $X = \widehat{A}$, $T = \widehat{H}$). On munit T de sa structure primaire : topologie, dynamique sur les points marqués (points de X), ordre cyclique aux points de branchement et degré de ramification aux points marqués.

La dynamique des points de branchement est déterminée par celle des points de X , on peut donc les ajouter à X . La dynamique sur les brins est également connue : Si ξ est le germe de x en $[x, y]_T$ avec $]x, y[\cap X = \emptyset$, le brin $f(\xi)$ est le germe $f(x)$ de $[f(x), f(y)]$.

Pour $x \in X$, posons $x_n = f^n(x)$ et notons $\nu(x)$ le nombre de brins de T en x . On a $x \in J$ si et seulement si le degré de ramification $r(x_n)$ est 1 pour tout x_n dans le cycle sur lequel tombe x . Nous allons indiquer comment déterminer les arguments externes de x dans K_f dans ce cas.

Si $x \in J$, posons $\check{\nu}(x) = \prod_{0 \leq i < n} r(x_i) \cdot \nu(x_n)$, avec n assez grand pour que x_n soit périodique. On peut définir un arbre \check{T} en ajoutant à T , en chacun des x_i , $\check{\nu}(x_i) - \nu(x_i)$ bourgeons, avec un ordre cyclique entre brins de T et bourgeons compatible avec la dynamique.

Arnaud trouve cela louche. Il faut la donnée complémentaire

L'arbre \check{T} se réalise comme une partie de $f^{-1}(T)$, et, en chaque point $x \in X$, il y a $\check{\nu}(x)$ brins de \check{T} et $\check{\nu}(x)$ accès à x relativement à \check{T} . La dynamique sur les accès aux points de X est déterminée par les données.

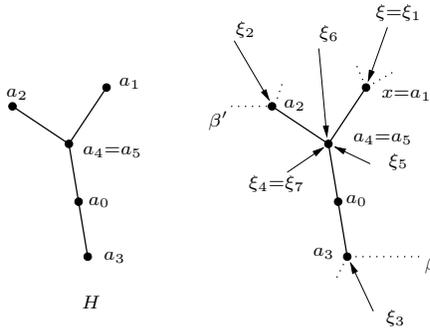
Pour chaque $i \in \mathbb{Z}/(d)$, notons w_i l'accès à β_i correspondant à l'argument externe i/d (si $d = 2$, c'est l'unique accès à β_i ; si $d > 2$, c'est une donnée supplémentaire qu'il

faut connaître pour faire le calcul). Posons $u(w_i) = i \in \{0, \dots, d - 1\}$, et $u(\xi) = i$ si ξ est entre w_i et w_{i+1} en tournant autour de \check{T} dans le sens direct.

Théorème. — Soient x un point de X , θ un argument externe de x dans K_f et ξ l'accès à x relativement à \check{T} , correspondant à θ . Notons ξ_n l'image de ξ par f^{n-1} (de sorte que $\xi_1 = \xi$). On a alors, $\theta = \sum_{n=1}^{\infty} u(\xi_n)/d^n$.

Autrement dit, les (ξ_n) sont les chiffres après la virgule du développement de θ en base d .

Démonstration. — C'est immédiat pour $n = 1$. L'accès $f^n(\xi)$ est l'accès à $f^n(x)$ correspondant à $d^n\theta$, son premier chiffre est le n -ème chiffre de θ . Cqfd.



$$u(\xi_1) = 0, u(\xi_2) = 0, u(\xi_3) = 1, u(\xi_4) = 1, u(\xi_5) = 0, u(\xi_6) = 0, u(\xi_7) = 1$$

$$\theta = \sum \frac{u(\xi_n)}{2^n} = .001\overline{100} = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{4}{7} \right) = \frac{11}{56}.$$

Corollaire 1. — Tout accès à x relativement à \check{T} correspond à un argument externe de x et un seul.

Corollaire 2. — Tout point $x \in X$ a un nombre fini $\check{\nu}(x)$ d'arguments externes. Ce sont des nombres rationnels, à dénominateur premier à d si et seulement si x est périodique.

EXPOSÉ VIII

ARGUMENTS EXTERNES DANS M DES POINTS DE MISUREWICZ

I - Représentation conforme de $\mathbb{C} \setminus M$

1. Potentiel des ensembles de Julia

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme monique de degré $d \geq 2$. On a vu (III proposition 2) que si K_f est connexe, il existe un isomorphisme $\varphi_f : \mathbb{C} \setminus K_f \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ unique, tangent à l'identité en ∞ (i.e. tel que $\varphi(z)/z \rightarrow 1$), et qui conjugue f à $f_0 : z \mapsto z^d$.

On pose $G_f(z) = \log |\varphi_f(z)|$. La fonction $G = G_f : \mathbb{C} \setminus K_f \rightarrow \mathbb{R}_+$ possède les propriétés suivantes :

- (1) G est harmonique.
- (2) $G(z) = \log |z| + O(1)$ quand $|z| \rightarrow \infty$.
- (3) $G(z) \rightarrow 0$ quand $d(z, K_f) \rightarrow 0$.
- (4) $G(z) = \frac{1}{d}G(f(z))$.

Les propriétés (1), (2) et (3), ou bien (2) et (4), suffisent à caractériser G . On peut même remplacer (2) par (2') $G(z)/\log |z| \rightarrow 1$ quand $|z| \rightarrow \infty$. Dans le cas général (K_f non nécessairement connexe), il existe un isomorphisme $\phi_f : V \rightarrow V_0$ tangent à l'identité en ∞ , tel que $f(V) \subset V$, $f_0(V_0) \subset V_0$, $f_0 \circ \phi_f = \phi_f \circ f$. Par exemple, si $f = z \mapsto z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \dots + a_0$, on peut prendre $V = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_{R^*}$ où $R^* = 1 + |a_{d-1}| + \dots + |a_0|$, et définir φ_f par

$$\varphi_f = z \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a_{d-1}}{z_n} + \dots + \frac{a_0}{z_n^d} \right)^{1/d^{n+1}} \quad \text{où } z_n = f^n(z),$$

la puissance fractionnaire étant déterminée en remarquant que

$$\left| 1 + \frac{a_{d-1}}{z_n} + \dots + \frac{a_0}{z_n^d} \right| < 1.$$

Nous préférons rétrécir V de façon que V_0 soit de la forme $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{R_0^*}$. Alors, f induit une application holomorphe propre de degré $d : V \rightarrow f(V)$; en particulier, $V = f^{-1}(f(V))$.

Le germe de φ_f en ∞ est déterminé de façon unique. On peut définir

$$G_f : \mathbb{C} \setminus K_f \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

par $G_f(z) = \log |\varphi_f(z)|$ pour $z \in V$, et dans le cas général $z \in \mathbb{C} \setminus K_f$ par $G_f(z) = \frac{1}{d^n} G_f(f^n(z))$ avec n assez grand pour que $f^n(z) \in V$ (le résultat ne dépend pas du choix de n). La fonction G_f possède encore les propriétés (1), (2), (3), (4) énoncées plus haut. Les propriétés (2) et (4) suffisent à la caractériser, car elles entraînent $G(z) = \lim \frac{1}{d^n} \log |f^n(z)|$. Il est encore vrai que G est caractérisée par (1), (2) et (3), mais c'est moins évident.

Notons \mathcal{P}_d l'espace des polynômes moniques de degré d (qu'on peut identifier à \mathbb{C}^d), et pour tout $g \in \mathcal{P}_d$, prolongeons G_f à \mathbb{C} par $G_f(z) = 0$ si $z \in K_f$.

Proposition 1

- a) L'ensemble \mathcal{K} des couples (f, z) tels que $z \in K_f$ est fermé dans $\mathcal{P}_d \times \mathbb{C}$.
- b) L'application $(f, z) \mapsto G_f(z)$ est une fonction continue $\mathcal{P}_d \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Démonstration. — Pour $f : z \mapsto z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \dots + a_0$, posons

$$R^*(f) = 1 + |a_{d-1}| + \dots + |a_0|, \quad R_0^*(f) = R^*(f)^{d/(d-1)}.$$

Posons

$$\mathcal{V}_1 = \{(f, z) \mid |z| > R^*(f)\}, \quad \mathcal{V}_0 = \{(f, z) \mid |z| > R_0^*(f)\};$$

définissons $\Phi : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{P} \times \mathbb{C}$ par $\Phi(f, z) = (f, \varphi_f(z))$, $F : \mathcal{P} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{P} \times \mathbb{C}$ par $(f, z) \rightarrow (f, f(z))$, et F_0 par $(f, z) \mapsto (f, z^d)$. On vérifie que Φ induit un isomorphisme d'un ouvert \mathcal{V} de \mathcal{V}_1 sur \mathcal{V}_0 .

On a $\mathcal{P}_d \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{K} = \bigcup F^{-n}(\mathcal{V}_1)$, d'où a).

La fonction $(f, z) \mapsto G_f(z)$ est continue sur $\mathcal{P}_d \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{K}$, car elle continue sur \mathcal{V}_1 où elle est donnée par une série localement normalement sommable, et sur chaque $F^{-n}(\mathcal{V}_1)$ elle est donnée par $G_f(z) = \frac{1}{d^n} G_f(f^n(z))$. Il reste à montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{W}_\varepsilon = \{(f, z) \mid G_f(z) < \varepsilon\}$ est un voisinage de \mathcal{K} . Il suffit de montrer que, pour tout ouvert relativement compact Λ de \mathcal{P}_d , l'ensemble $\mathcal{W}_{\varepsilon, \Lambda} = \mathcal{W}_\varepsilon \cap \Lambda \times \mathbb{C}$ est ouvert dans $\Lambda \times \mathbb{C}$. Posons $R_0^*(\Lambda) = \sup_{f \in \Lambda} R_0^*(f)$ et soit N tel que $d^N \varepsilon > R_0^*(\Lambda)$. Alors,

$$\begin{aligned} \Lambda \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{W}_{\varepsilon, \Lambda} &= F^{-N}(\Lambda \times \mathbb{C} \setminus \mathcal{W}_{d^N \varepsilon, \Lambda}) \\ &= F^{-N}(\Phi^{-1}(\{(f, z) \mid |z| \geq d^N \varepsilon\})). \end{aligned}$$

C'est un fermé.

Cqfd.

2. Points critiques de G_f

Proposition 2. — *Les points critiques de $G_f : \mathbb{C} \setminus K_f \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont les points des orbites inverses des points critiques de f dans $\mathbb{C} \setminus K_f$.*

Démonstration. — Si $\varphi_f : V \rightarrow V_0$ est un isomorphisme, $G_f = \log |\varphi_f|$ n'a aucun point critique dans V . La formule $G(z) = \frac{1}{d}G(f(z))$ montre que z est point critique de G_f si et seulement si z est point critique de f ou $f(z)$ point critique de G_f .

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus K_f$ et posons $z_n = f^n(z)$. Pour n assez grand, $z_n \in V$, donc z_n n'est pas point critique de G_f . Par suite, z est point critique de G_f si et seulement si l'un des z_n est point critique de f . Cqfd.

Corollaire 1. — *Si tous les points critiques de f sont dans K_f , pour tout $h > 0$, l'ensemble $G_f^{-1}(h)$ est homéomorphe à S^1 et l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $G_f(z) \leq h$, est homéomorphe à un disque fermé.*

On retrouve une démonstration du fait que, dans ce cas, K_f est connexe.

Corollaire 2. — *Notons h_0 le plus grand des $G_f(a)$ pour a point critique de f dans $\mathbb{C} \setminus K_f$ (et $h_0 = 0$ s'il n'y en a pas). Alors, pour tout $h > h_0$, l'ensemble $G_f^{-1}(h)$ est homéomorphe à S^1 et $\{z \in \mathbb{C} \mid G_f(z) \leq h\}$ est homéomorphe à $\overline{\mathbb{D}}$. L'ensemble $L_f = \{z \mid G_f(z) \leq h_0\}$ est un compact connexe. L'application φ_f s'étend en un isomorphisme de $\mathbb{C} \setminus L_f$ sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}_R$ avec $R = e^{h_0}$.*

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus L_f$, on définit l'argument externe $\arg_{K_f}(z) = \arg_{L_f}(z) = \arg \varphi_f(z)$. Si $0 < G_f(z) \leq h_0$, et si z n'est pas un point critique de G_f , on peut définir le rayon externe de f passant par z comme trajectoire orthogonale aux lignes de niveau de G_f . Ce rayon, prolongé du côté des G_f croissants, peut sortir de L_f , ce qui permet alors de définir $\arg_{K_f}(z)$, ou bien finir sur un point critique de G_f . Un point critique de G_f est un col s'il a dans son orbite directe un seul point critique de f , simple. Dans le cas général, c'est une « selle de singe » avec r rayons ascendants et r rayons descendants, r étant le produit de ramification des points critiques dans l'orbite directe de z . Au total, il y a une famille dénombrable de courbes \mathbb{R} -analytiques sur lesquelles on ne peut pas définir la fonction « argument externe ».

3. La fonction Φ

Considérons la famille de polynômes quadratiques $f_c : z \mapsto z^2 + c$. On écrira φ_c pour φ_{f_c} , etc.

Pour $c \in \mathbb{C} \setminus M$, on a $h_0(c) = G_c(0) > 0$ et $G_c(c) = 2G_c(0) > h_0(c)$. On peut donc poser : $\Phi(c) = \varphi_c(c)$.

Théorème 1. — *On définit ainsi un isomorphisme Φ de $\mathbb{C} \setminus M$ sur $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$.*

Démonstration. — Pour $c \in \mathbb{C} \setminus M$, on a $\log |\Phi(c)| = G_c(c) > 0$, donc $\Phi(c) \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. L'application Φ est holomorphe. En effet,

$$\mathcal{L} = \{(c, z) \mid z \in L_c\} = \{(c, z) \mid G_c(z) \leq G_c(0)\}$$

est fermé, et, sur $\mathbb{C}^2 \setminus \mathcal{L}$, l'application $(c, z) \mapsto \varphi_c(z)$ qui est une détermination de $(\varphi_c(f_c^n(z)))^{\frac{1}{2^n}}$, est holomorphe.

On peut écrire :

$$\frac{\Phi(c)}{c} = \left(1 + \frac{1}{c}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{c}{(c^2 + c)^2}\right)^{1/4} \cdots \left(1 + \frac{c}{f_c^n(c)^2}\right)^{1/2^{n+1}} \cdots;$$

Ce produit infini converge uniformément pour $|c| \geq 4$ et tous ses facteurs tendent vers 1 quand $c \rightarrow \infty$. Par suite $\Phi(c)/c \rightarrow 1$ quand $c \rightarrow \infty$. On peut donc prolonger $\Phi(c)$ en une application holomorphe $\overline{\mathbb{C}} \setminus M \rightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, où $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est la sphère de Riemann, en posant $\Phi(\infty) = \infty$. L'application ainsi prolongée est propre : en effet, si $c \rightarrow c_0 \in \partial M$, $G_c(c) \rightarrow G_{c_0}(c_0) = 0$ et $|\Phi(c)| \rightarrow 1$.

En tant qu'application holomorphe propre, elle a un degré. Or, $\Phi^{-1}(\infty) = \{\infty\}$ avec multiplicité 1 ; donc ce degré est 1 et Φ est un isomorphisme $\mathbb{C} \setminus M \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$. Cqfd.

Corollaire 1

- a) L'ensemble M est connexe.
- b) Son rayon de capacité est 1.

Corollaire 2. — Pour tout $c \in \mathbb{C} \setminus M$, on a :

- a) $G_M(c) = G_c(c)$.
- b) $\arg_M(c) = \arg_{K_c}(c)$.

Le théorème 3 qui suit plus bas affirme en quelque sorte que la formule b) du corollaire 3 s'étend à certains points du bord de M .

II - Rayons externes des ensembles de Julia

1. Comportements possibles

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme monique. Quand on suit un rayon externe $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ de K_f dans le sens des G_f décroissants, ce rayon peut soit *bute* sur un point critique de G_f , soit se prolonger jusqu'à ce que $G_f \rightarrow 0$, *i.e.* jusqu'à tendre vers K_f .

Dans ce cas, il peut soit tendre vers un point de K_f — on dit alors qu'il *aboutit* en ce point —, soit avoir dans K_f un ensemble d'accumulation connexe non réduit à un point — nous dirons qu'il *vagabonde*. Si $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ ne bute pas, on a $f(\mathcal{R}(K_f, \theta)) = \mathcal{R}(K_f, d \cdot \theta)$. Ce rayon aboutit en $f(x)$ si $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ aboutit en x , vagabonde si $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ vagabonde. Il peut arriver que $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ bute, mais que $\mathcal{R}(K_f, d \cdot \theta)$ ne bute pas.

Proposition 1. — Si f est sous-hyperbolique, tout rayon externe de K_f bute ou aboutit.

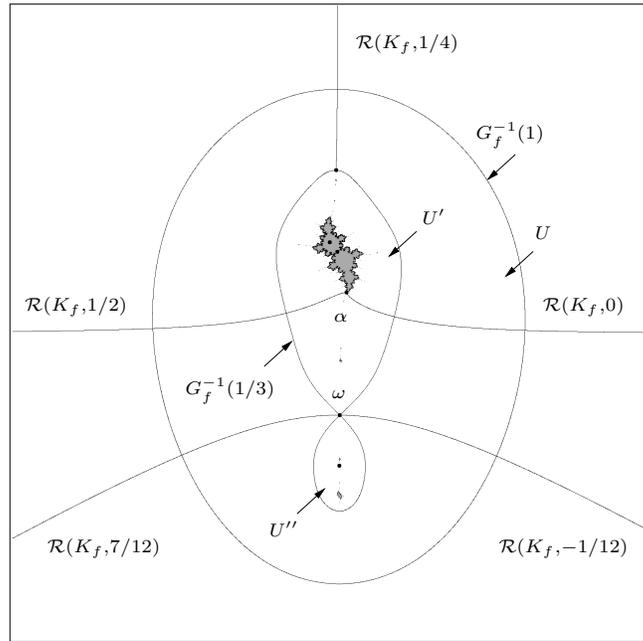


FIGURE 1. Deux comportements possibles pour les rayons externes d'un polynôme cubique ayant un ensemble de Julia non connexe. Les rayons $\mathcal{R}(K_f, 0)$ et $\mathcal{R}(K_f, 1/2)$ aboutissent en α , tandis que les rayons $\mathcal{R}(K_f, -1/12)$ et $\mathcal{R}(K_f, 7/12)$ butent sur le point critique ω . L'ensemble $U = \{z \in \mathbb{C} \mid G_f(z) < 1\}$ est un disque topologique, alors que l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid G_f(z) < 1/3\}$ a deux composantes connexes U' et U'' .

Démonstration. — Soient V un voisinage de J_f , μ une métrique admissible sur V et $\lambda > 1$ tels que $\|T_z f\|_\mu \geq \lambda$ pour tout $z \in f^{-1}(V)$. Soit $h > 0$ tel que

$$\{z \mid G(z) \leq h\} \subset V \setminus \overset{\circ}{K}_f;$$

posons $Q = \{z \mid h/d \leq G(z) \leq h\}$ et notons M la borne supérieure des μ -longueurs des rayons externes entre les niveaux h et h/d (le fait qu'il puisse y avoir des points critiques de G_f dans Q n'empêche pas M d'être fini). La μ -longueur d'un rayon externe au-dessous du niveau a est majorée par $M/(\lambda - 1)$, d'où la proposition. Cqfd.

2. Rayons externes d'argument rationnel

Proposition 2. — *On suppose θ rationnel. Alors, si $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ ne bute pas, il aboutit en un point $\alpha \in K_f$. Ce point est prépériodique (périodique si θ est à dénominateur premier à d), répulsif ou indifférent rationnel.⁽¹⁾*

Démonstration. — Supposons d'abord θ à dénominateur premier à d . Si $\theta = p_0/q$, alors d est inversible mod q , donc il existe k tel que $d^k \equiv 1 \pmod{q}$, i.e. q divise $d^k - 1$. On peut alors écrire θ , de façon peut-être non irréductible mais avec un k minimal, sous la forme $p/(d^k - 1)$. On suppose que $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ ne bute pas; il est alors invariant par f^k .

Soient h_0 la borne inférieure des $G_f(\omega)$ pour ω point critique de f dans $\mathbb{C} \setminus K_f$ (s'il n'y en a pas, $h_0 = \infty$) et $h < h_0$. Soient

$$U = \{z \mid 0 < G(z) < h\} \quad \text{et} \quad U' = f^{-k}(U) = \{z \mid 0 < G(z) < h/d^k\}.$$

Notons \tilde{U} un revêtement universel de la composante connexe de U rencontrant $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ et $\tilde{\mathcal{R}}$ un relèvement de $\mathcal{R}(K_f, \theta) \cap U$ dans \tilde{U} . Il existe un relèvement $g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ de f^{-k} tel que $g(\tilde{\mathcal{R}}) \subset \tilde{\mathcal{R}}$. Choisissons $x_0 \in \mathcal{R}(K_f, \theta) \cap U$ et définissons $x_n \in \mathcal{R}(K_f, \theta)$ par $G(x_n) = G(x_0)/d^{kn}$, de sorte que $f^k(x_{n+1}) = x_n$. Soit L la longueur de Poincaré dans U de $[x_0, x_1]_{\mathcal{R}(K_f, \theta)}$. Comme g est contractante pour la métrique de Poincaré $d_{\tilde{U}}$ de \tilde{U} , on a $d_U(x_n, x_{n+1}) \leq L$ pour tout n . Comme X_n tend vers $\partial K \subset \partial U$, la distance euclidienne $|x_{n+1} - x_n|$ tend vers 0. Si la suite extraite $(x_n)_{n \in I}$ tend vers un point $\alpha \in \partial K$, la suite (x_{n-1}) tend aussi vers α , donc $f^k(\alpha) = \alpha$.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les points tels que $f^k(\alpha) = \alpha$, W_1, \dots, W_r des voisinages de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que $d_U(W_i \cap U, W_j \cap U) > L$ pour $i \neq j$. Il existe un n_0 tel que $x_n \in \cup W_i$ pour $n \geq n_0$, sinon on pourrait extraire de (x_n) une suite tendant vers un $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$. Mais comme $d_U(x_n, x_{n+1}) \leq L$, les x_n pour $n \geq n_0$ appartiennent tous au même W_i , disons W_1 . Alors, $x_n \rightarrow \alpha_1$, car pour toute suite extraite convergente vers un point α , on a $\alpha = \alpha_1$. Tout $y \in \mathcal{R}(K_f, \theta)$ tel que $G(y) \leq G(x_0)$ appartient à un segment $[x_{n(y)}, x_{n(y)+1}]$ de $\mathcal{R}(K_f, \theta)$, on a alors $d_U(y, x_{n(y)}) \leq L$. Il en résulte que $|y - x_{n(y)}| \rightarrow 0$, donc $y \rightarrow \alpha = \alpha_1$ quand $G(y) \rightarrow 0$. En d'autres termes, $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ aboutit en α , qui est un point prépériodique de f , de période k' , divisant k .

Le point α appartient à ∂K , il n'est donc pas attractif; par suite, il est répulsif ou indifférent.

Lemme. — *Si α est un point périodique indifférent, on a $(f^k)'(\alpha) = 1$.*

⁽¹⁾Douady, inspiré par Yoccoz, a démontré que lorsque l'ensemble de Julia d'un polynôme est connexe, tout point périodique répulsif est le point d'aboutissement d'un nombre fini de rayons externes périodiques (éventuellement avec une période plus grande). Ce résultat reste vrai pour un point périodique indifférent rationnel.

(2)

Démonstration. — Supposons que $(f^k)'(\alpha) = e^{2i\pi t}$. On a

$$t = \lim t_n, \quad \text{où } t_n = \arg \left(\frac{x_{n-1} - \alpha}{x_n - \alpha} \right).$$

Soit \tilde{t}_n le représentant de t_n dans \mathbb{R} défini par le chemin de x_n à x_{n-1} suivant $\mathcal{R}(K_f, \theta)$. La suite (\tilde{t}_n) tend vers un représentant \tilde{t} de t . Nous allons montrer que $\tilde{t} = 0$.

On définit une fonction holomorphe $F : \{z \mid \operatorname{Re}(z) < m\} \rightarrow \mathbb{C}$ par la formule $F(\log(z - \alpha)) = \log(f^k(z) - \alpha)$, précisée par la convention que $F(\zeta) - \zeta$ tend vers $2i\pi\tilde{t}$ quand $\operatorname{Re} \zeta \rightarrow 0$.

On définit une paramétrisation $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}(K_f, \theta)$ par $G_f(\gamma(s)) = G_f(x_0)/d^s$, de sorte que $x_n = \gamma(n)$. Soit $\tilde{\gamma}$ une détermination continue de $s \rightarrow \log(\gamma(s) - \alpha)$. Notons $\tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ l'image de γ et $\tilde{x}_n = \tilde{\gamma}(n)$. La suite $\operatorname{Re}(\tilde{x}_n)$ tend vers $-\infty$, et on a $\tilde{x}_{n-1} = F(\tilde{x}_n)$ pour n assez grand.

Supposons $\tilde{t} > 0$. Quitte à diminuer m , on peut supposer que

$$\inf_{\operatorname{Re} \zeta < m} \operatorname{Im}(F(\zeta) - \zeta) = \mu > 0,$$

et que F définit un isomorphisme du demi-plan $\{\zeta \mid \operatorname{Re} \zeta < m\}$ sur un ouvert contenant le demi-plan $P_1 = \{\zeta \mid \operatorname{Re} \zeta < m_1\}$. Alors $\operatorname{Re} \gamma(s) \rightarrow -\infty$ et $\operatorname{Im} \gamma(s) \rightarrow -\infty$ quand $s \rightarrow +\infty$. Pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, notons N_η la composante connexe de $\{\zeta \mid \operatorname{Im} \zeta < \eta\} \setminus \tilde{\mathcal{R}}_\alpha$ contenant les $u + i(\eta - 1)$ pour $u \rightarrow -\infty$. Si η est assez petit, $N_\eta \subset P_1$, et $F^{-1}(N_\eta) \subset N_{\eta-\mu}$.

L'image Ω_η de N_η par $\zeta \mapsto \alpha + e^\zeta$ est un voisinage de α , et l'image de $N_{\eta,p} = F^{-p}(N_\eta)$ est l'image $\Omega_{\eta,p}$ de Ω_η par la branche de f^{-pk} qui a pour point fixe α . On a $N_{\eta,p} \subset N_{\eta-p,\mu}$, qui est dans le demi-plan $\{\zeta \mid \operatorname{Re} \zeta < m_2\}$ avec m_2 arbitrairement négatif si p assez grand, donc $\Omega_{\eta,p}$ est arbitrairement petit. En particulier, on peut avoir $\Omega_{\eta,p} \Subset \Omega_\eta$. Alors, le lemme de Schwarz montre que $|(f^{-pk})'(\alpha)| < 1$, donc α est répulsif, donc contradiction. Cqfd.

Fin de la démonstration de la proposition 2. — Si θ est à dénominateur premier à d , $\theta = p/(2^k - 1)$, $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ aboutit en un point $\alpha \in K_f$, périodique pour f de période k' divisant k' . On a $(f^{-pk})'(\alpha) = 1$, donc $(f^{-pk'})'(\alpha)$ est une racine k/k' -ème de 1.

Si θ n'est pas à diviseur premier à d , on peut mettre θ sous la forme $p/d^\ell q$ avec q premier à d . Alors, si $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ ne bute pas, $f^\ell(\mathcal{R}(K_f, \theta)) = \mathcal{R}(K_f, \theta_1)$ où $\theta_1 = d^\ell \theta = p/q$. Le rayon $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ ne peut pas vagabonder, car $\mathcal{R}(K_f, \theta_1)$ vagabonderait. Il aboutit donc en un point α , donc $\mathcal{R}(K_f, \theta_1)$ aboutit en $\alpha_1 = f^\ell(\alpha)$, d'après le cas étudié, α_1 est périodique répulsif ou indifférent rationnel. Cqfd.

⁽²⁾Ce lemme est une variante du lemme dit « de l'escargot ».

3. Une propriété de stabilité

On note \mathcal{P}_d l'ensemble des polynômes moniques de degré d . Pour $f \in \mathcal{P}_d$ et $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on définit $\psi_{f,\theta} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathcal{R}(K_f, \theta)$ par $G_f(\psi_{f,\theta}(s)) = s$ si $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ ne bute pas; s'il bute sur un point critique ω de G_f , la fonction $\psi_{f,\theta}$ est seulement définie sur $[G_f(\omega), +\infty[$. Si $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ aboutit en un point α , on prolonge $\psi_{f,\theta}$ jusqu'à \mathbb{R}_+ en posant $\psi_{f,\theta}(0) = \alpha$.

Proposition 3. — Soient $f_0 \in \mathcal{P}_d$ et $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On suppose que $\mathcal{R}(K_{f_0}, \theta)$ aboutit en un point prépériodique répulsif $\omega_0 \in J_{f_0}$. On suppose en outre que $f^i(\alpha_0)$ n'est un point critique de f pour aucune valeur de $i \geq 0$. Il existe un voisinage Λ de f_0 dans \mathcal{P}_d , tel que, pour tout $f \in \mathcal{P}_d$, le rayon $\mathcal{R}(K_f, \theta)$ aboutisse en un point prépériodique répulsif α_f . L'application $(f, s) \rightarrow \psi_{f,\theta}(s)$ de $\Lambda \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{C} est continue, holomorphe en f .

Démonstration. — Supposons θ à dénominateur premier à d , donc de la forme $p/(d^k - 1)$. On peut trouver un voisinage Λ_1 de f_0 dans \mathcal{P}_d , des voisinages \mathcal{V} et \mathcal{V}' de (f_0, α_0) dans $\mathcal{P}_d \times \mathbb{C}$, tels que $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ et que $(f, z) \mapsto (f, f^k(z))$ induise un isomorphisme de \mathcal{V} sur $\Lambda_1 \times \mathbb{D}$, et une application analytique $\rho : \Lambda_1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$, de façon que $\zeta_f(f^k(z)) = \rho(f) \cdot \zeta_f(z)$ pour $(f, z) \in \mathcal{V}'$. On pose $\alpha_f = \zeta_f^{-1}(0)$; on a alors $f^k(\alpha_f) = \alpha_f$ et $(f^k)'(\alpha_f) = \rho(f)$.

Soit $s_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(f_0, \psi_{f_0,\theta}(s_0)) \in \mathcal{V}'$. En vertu des théorèmes de semi-continuité du temps de vie des solutions d'équations différentielles, et de dépendance de ces solutions par rapport à un paramètre, il existe un voisinage Λ de f_0 dans Λ_1 tel que, pour tout $f \in \Lambda$, $\psi_{f,\theta}$ soit défini sur $[s_0, +\infty[$ avec $(f, \psi_{f,\theta}(s_0)) \in \mathcal{V}'$, et $\psi_{f,\theta}(s)$ dépendant de façon continue de (f, s) et holomorphe en f pour $f \in \Lambda$, $s \geq s_0$. Pour chaque $f \in \Lambda$, on peut prolonger $\psi_{f,\theta}$ à \mathbb{R}_+^* en posant

$$\psi_{f,\theta}\left(\frac{s}{d^{k_n}}\right) = \zeta_f^{-1}\left(\frac{\zeta_f(\psi_{f,\theta}(s))}{\rho(f)^n}\right) \quad \text{pour } s \geq s_0, \psi_{f,\theta}(s) \in \mathcal{V}.$$

On obtient ainsi une application $(f, s) \mapsto \psi_{f,\theta}(s)$ définie sur $\Lambda \times \mathbb{R}_+^*$, continue et holomorphe en f . Pour chaque f , l'image de $\psi_{f,\theta}(s)$ est $\mathcal{R}(K_f, \theta)$. Enfin, $\psi_{f,\theta}(s) \rightarrow \alpha_f$ uniformément sur tout compact de Λ quand $s \rightarrow 0$. On peut donc prolonger $(f, s) \mapsto \psi_{f,\theta}(s)$ continûment à $\Lambda \times \mathbb{R}_+$.

Ceci démontre la proposition dans le cas où θ est à dénominateur premier à d (ce qui entraîne α_0 périodique). Dans le cas général, il existe un $\ell \geq 0$ tel que $\theta^* = d^\ell \theta$ soit à dénominateur premier à d . Pour tout $i \geq 0$, le rayon externe $\mathcal{R}(K_f, d^i \theta)$ aboutit à $f^i(\alpha_0)$. On démontre la propriété énoncée pour $d^i \theta$ par récurrence descendante sur i à partir de $i = \ell$. Pour $i = \ell$, c'est le cas particulier étudié. Pour $i < \ell$, l'application $\mathcal{F} : (f, z) \mapsto (f, f(z))$ admet un inverse holomorphe g_i défini au voisinage de $\{f_0\} \times \overline{\mathcal{R}(K_{f_0}, d^{i+1}\theta)}$ avec $g_i(\{f_0\} \times \overline{\mathcal{R}(K_{f_0}, d^{i+1}\theta)}) = \{f_0\} \times \overline{\mathcal{R}(K_{f_0}, d^i\theta)}$, puisque \mathcal{F} n'a pas de point critique sur $\{f_0\} \times \overline{\mathcal{R}(K_{f_0}, d^i\theta)}$. On peut alors définir $\psi_{f,d^i\theta}(s)$ pour $s \leq s_0$ et f assez voisin de f_0 par $(f, \psi_{f,d^i\theta}(s)) = g_i(f, \psi_{f,d^{i+1}\theta}(ds))$. Cqfd.

III - Récolte dans le plan des paramètres

On considère la famille $(f_c : z \mapsto z^2 + c)_{c \in \mathbb{C}}$ de polynômes du second degré.

Théorème 2. — Soit $c \in M$ un point tel que 0 soit strictement prépériodique pour f_c (point de Misurewicz).

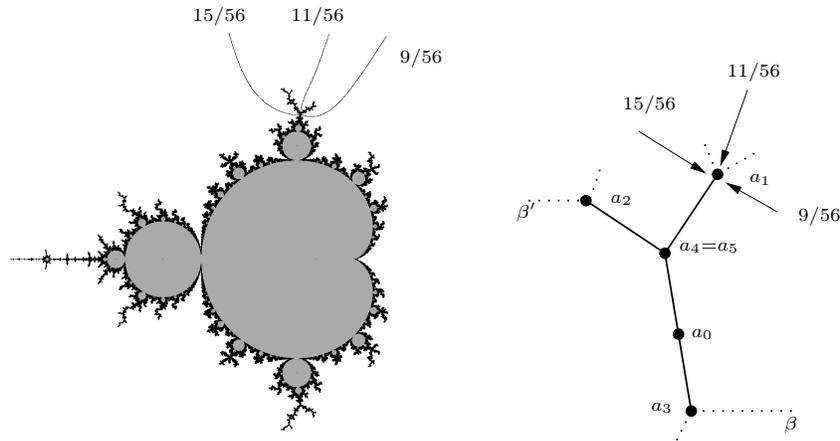
a) Le point c a dans K_c un nombre fini d'arguments externes, qui sont rationnels à dénominateurs pair.

b) Pour chaque argument externe θ de c dans K_c , le rayon $\mathcal{R}(M, \theta)$ aboutit en c .

La partie a) est un cas particulier de VII, corollaire 2 du théorème.

Démonstration de b). — Le point c est un point prépériodique répulsif de f_c et on a $\psi_{c,\theta}(0) = c$, avec les notations de 3. Le point c n'admet pas de point critique dans son orbite directe puisque $c = f_c(0)$ et que 0 n'est pas périodique. Pour λ voisin de c et $s \in \mathbb{R}_+$, posons $H_s(\lambda) = \psi_{\lambda,\theta}(s) - \lambda$. Notons ν l'ordre du zéro de H_0 en c . On a $\nu < \infty$ car sinon on aurait $f_\lambda^{k+\ell+1}(0) = f_\lambda^{\ell+1}(0)$ pour tout λ voisin de c , donc pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pour $s > 0$ voisin de 0, l'équation $H_s(\lambda) = 0$ admet ν solutions voisines de c , en tenant compte des multiplicités. Pour une telle racine λ , on a $\lambda = \psi_{\lambda,\theta}(s)$, d'où $\lambda \notin K_\lambda$, i.e. $\lambda \notin M$, et $\Phi(\lambda) = \varphi_\lambda(\lambda) = e^{s+2i\pi\theta}$. On voit donc que $\Phi^{-1}(e^{s+2i\pi\theta}) \rightarrow c$ quand $s \rightarrow 1$. Cqfd.



La démonstration ci-dessus donne aussi le résultat suivant :

Corollaire 1. — L'équation $P_\lambda^{\ell+1+k}(0) - P_\lambda^{\ell+1}(0) = 0$ admet en c une racine simple.

Démonstration. — La multiplicité de c comme racine de cette équation est égale à ν introduit dans la démonstration du théorème.

Pour $s > 0$, l'équation $H_s(\lambda) = 0$ n'a qu'une solution, puisque c'est nécessairement $\Phi^{-1}(e^{s+2i\pi\theta})$.

On passe de l'équation $\lambda = \psi_{\lambda,\theta}(s)$, qui donne l'intersection de la diagonale avec le graphe de $\lambda \mapsto \psi_{\lambda,\theta}(s)$, à l'équation $\varphi_\lambda(\lambda) = e^{s+2i\pi\lambda}$ en transformant ces deux courbes par le difféomorphisme $(\lambda, z) \mapsto (\lambda, \varphi_\lambda(z))$. La multiplicité de la solution de $\lambda = \psi_{\lambda,\theta}(s)$ est donc égale à celle de $\Phi(\lambda) = e^{s+2i\pi\lambda}$, qui est 1 puisque Φ est un isomorphisme. On a donc $\nu = 1$. Cqfd.

Remarque. — Il existe aussi d'autres démonstrations de ce corollaire, par exemple une démonstration arithmétique consistant à compter des valuations 2-adiques.

EXPOSÉ IX

POINTS FIXES MULTIPLES ET POINTS PÉRIODIQUES INDIFFÉRENTS RATIONNELS

I - Points fixes multiples

Si f est un polynôme ayant en α un point périodique de période k , avec $(f^k)'(\alpha) = e^{2i\pi p/q}$, le polynôme f^{kq} a en α un point fixe avec dérivée 1. Pour cette raison, nous allons commencer par étudier les points fixes avec dérivée 1.

On peut supposer que le point fixe est 0. Une grande partie de l'étude peut se faire pour les applications holomorphes au voisinage de 0.

1. Ordre d'un point fixe

Soit f une fonction holomorphe au voisinage de 0, avec $f(0) = 0$. L'ordre de 0 comme point fixe de f est l'ordre r d'annulation en 0 de $z \mapsto f(z) - z$. On dit que 0 est un point fixe multiple si $r \geq 2$. On peut alors écrire $f(z) = z + bz^r + \mathcal{O}(z^{r+1})$ avec $b \neq 0$. Ceci peut aussi s'écrire $f(z) = z(1 + bz^{r-1} + \mathcal{O}(z^r))$. Les z tels que $bz^{r-1} \in \mathbb{R}_+$ (resp. \mathbb{R}_-) forment $r - 1$ demi-droites, faisant entre elles des angles de $1/(r - 1)$ tour, qu'on appellera les *axes de répulsion* (resp. *axes d'attraction*) de 0 pour f .

Remarques

1) Si φ est une fonction holomorphe au voisinage de 0 avec $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) \neq 0$, qui conjugue f à g (i.e. $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$), l'application linéaire tangente $T_0\varphi : z \mapsto \varphi'(0) \cdot z$ envoie les axes de répulsion (resp d'attraction) de f sur ceux de g .

2) On peut, par une fonction holomorphe tangente à l'identité en 0, conjuguer f à une fonction g de la forme $z \mapsto z + bz^r + \mathcal{O}(z^{2r-1})$, ou même de la forme $z \mapsto z + bz^r + cz^{2r-1} + \mathcal{O}(z^\nu)$ avec ν arbitraire. Pour les obstruction à conjuguer à $z \mapsto z + bz^r + cz^{2r-1}$, voir le cours d'Ecalte.

2. Un changement de variables

Pour étudier f , on souhaite faire le changement de variable $z \mapsto 1/(r-1)bz^{r-1}$. Mais cette application n'est pas injective au voisinage de 0, et ceci nous amène à poser certaines conventions.

Soient Ω un ouvert de \mathbb{C} , $\tilde{\Omega}$ un revêtement de Ω et $\pi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ la projection. Pour $Z \in \tilde{\Omega}$, on pose : $|Z| = |\pi(Z)|$. Soient $Z \in \tilde{\Omega}$ et $u \in \mathbb{C}$ assez voisin de 0 pour que, pour tout $t \in [0, 1]$, $\pi(Z) + tu \in \Omega$. Le chemin $\gamma : t \mapsto \pi(Z) + tu$ dans Ω admet dans $\tilde{\Omega}$ un unique relèvement $\tilde{\gamma}$ d'origine Z ; on notera alors $Z + u$ le point $\tilde{\gamma}(1) \in \tilde{\Omega}$. Pour λ voisin de 1, on définit λZ par $\lambda Z = Z + (\lambda - 1)\pi(Z)$.

Soit D_ρ un disque contenu dans le domaine de définition de f . L'application $z \mapsto 1/(r-1)bz^{r-1}$ définit un isomorphisme $h : z \mapsto Z$ de $D_\rho \setminus \{0\}$ sur un revêtement $\tilde{\Omega}$ de degré $r-1$ de $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{D}_R$, où $R = 1/(r-1)|b|\rho^{r-1}$. Notons $\pi : \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega$ la projection et F l'application $h \circ f \circ h^{-1}$, définie sur un ouvert $\tilde{\Omega}'$ de $\tilde{\Omega}$ contenant $\pi^{-1}(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{R'})$ pour R' assez grand.

Proposition 1. — L'application F est de la forme $Z \mapsto Z - 1 + \mathcal{O}(|Z|^{-1/r-1})$.

Démonstration. — Soient $Z \in \tilde{\Omega}'$, $z = h^{-1}(Z)$, $z_1 = f(z)$ et $Z_1 = h(z_1) = F(Z)$. On a :

$$\begin{aligned} z_1 &= z + bz^r + \mathcal{O}(|z|^{r+1}) = z(1 + bz^{r-1} + \mathcal{O}(|z|^r)) \\ \pi(Z_1) &= \frac{1}{(r-1)b} z_1^{-(r-1)} = \pi(Z)(1 + bz^{r-1} + \mathcal{O}(|z|^r))^{-(r-1)} \\ &= \pi(Z) \left(1 - \frac{1}{\pi(Z)} + \mathcal{O}(|z|^{-r/r-1}) \right) \end{aligned}$$

Comme z et z_1 sont voisins, Z et Z_1 sont sur le même feuillet et on a :

$$Z_1 = Z \left(1 - \frac{1}{\pi(Z)} + \mathcal{O}(|z|^{-r/r-1}) \right) = Z - 1 + \mathcal{O}(|Z|^{-1/r-1}). \quad \text{Cqfd.}$$

Remarque. — Les $r-1$ axes de répulsion (resp. d'attraction) correspondent aux relèvements dans $\tilde{\Omega}$ de $\mathbb{R}_+ \cap \Omega$ (resp. $\mathbb{R}_- \cap \Omega$).

3. Pétales

Soient R_1 et M tels que, pour $|Z| \geq R_1$, $F(Z)$ soit défini et de la forme $F(Z) = Z - 1 + \eta(Z)$ avec $|\eta(Z)| \leq M/|Z|^{1/r-1} \leq 1/2$. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe de la forme $\{(x + iy) \mid x = H(y)\}$ où $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ ayant les propriétés suivantes :

- (i) H est convexe et paire;
- (ii) $H(0) < -R_1$;
- (iii) $y \mapsto |H(y) + iy|$ est croissante sur \mathbb{R}_+ ;
- (iv) $|H'(y)| < 1/\tan(\theta)$, où $\sin \theta = 2M/|Z|^{1/r-1}$, $Z = H(y) + iy$;
- (v) $H'(y) \rightarrow +\infty$ quand $y \rightarrow \infty$.

Les conditions (i) et (v) entraînent que Γ a une branche parabolique dans la direction de \mathbb{R}_+ . Les conditions (ii) et (iii) entraînent que $\Gamma \cap \overline{D}_{R_1} = \emptyset$.

Soient $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{r-1}$ les relèvements de Γ dans $\tilde{\Omega}$ et posons $F_i(\Gamma) = \pi(F(\Gamma_i))$. La condition (iv) assure que chacune des $F_i(\Gamma)$ se trouve strictement à gauche de $\tau_{-1/2}(\Gamma)$, où $\tau_{-1/2}$ est la translation $Z \mapsto Z - 1/2$. Soit G l'ensemble des $Z = x + iy \in \mathbb{C}$ tels

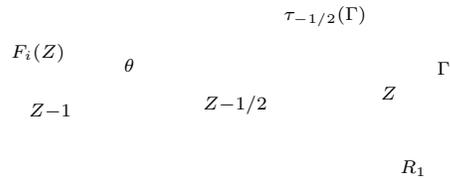


FIGURE 1. Un choix possible de courbe Γ . La courbe $F_i(\Gamma)$ est à gauche de $\tau_{-1/2}(\Gamma)$.

que $x \leq H(y)$ (région située à gauche de Γ). L'image réciproque de G dans $\tilde{\Omega}$ est formée de $r - 1$ copies G_1, \dots, G_{r-1} de G , et on a $F(G_i) \subset \tau_{-1/2} \overset{\circ}{G}_i$.

Pour chaque i , on pose $P_i = h^{-1}(G_i) \cup \{0\}$. Les P_i sont des compacts que l'on appelle les *pétales* de f en 0. Ils dépendent du choix de Γ . On a $f(P_i) \subset \overset{\circ}{P}_i \cup \{0\}$. Chaque P_i est limité par une courbe $\gamma_i = h^{-1}(\Gamma_i)$, image d'un chemin $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, injectif sur $]0, 1[$, qui part de 0 tangentiellement à un axe de répulsion, croise un axe d'attraction (appelé *axe* du pétale) et revient à 0 tangentiellement à l'axe de répulsion suivant.

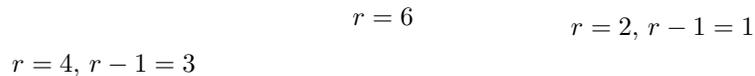


FIGURE 2. Les pétales P_i .

La fleur $\bigcup P_i$ est contenue dans le disque $D_{\rho_1} = \{0\} \cup h^{-1}(\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{R_1})$. Pour $\rho' < 1/|H(0)|^{r-1}$, l'ouvert $D_{\rho'} \setminus \bigcup P_i$ a $r - 1$ composantes connexes, qu'on appelle les interpétales.

Proposition 2. — Soient P_i l'un des pétales de f en 0 et $z \in P_i \setminus \{0\}$.

- a) $f^n(z) \rightarrow 0$ tangentiellement à l'axe de P_i ;
- b) $f^n \rightarrow 0$ uniformément sur P_i .

Démonstration

a) Posons $z_n = f^n(z)$, $Z = h(z)$, $Z_n = h(z_n) = F^n(Z)$, écrivons $\operatorname{Re} Z$ pour $\operatorname{Re}(\pi(Z))$, etc. On a $\operatorname{Re} Z_{n+1} \leq \operatorname{Re} Z_n - 1/2$, donc $\operatorname{Re} Z_n \rightarrow -\infty$, d'où $|Z_n| \rightarrow \infty$ et $|z_n| \rightarrow 0$. On a $Z_{n+1} - Z_n \rightarrow -1$, d'où $\arg Z_n \rightarrow 1/2$, et l'angle de z_n avec l'axe de P_i tend vers 0. Cqfd.

b) On a $F^n(G_i) \subset \tau_{-n/2}(G_i)$, donc pour tout $R'' > 0$, il existe un n_0 tel que $\pi(F^n(G_i)) \cap D_{R''} = \emptyset$ pour $n \geq n_0$. Par suite,

$$\forall \rho'' > 0 \quad (\exists n_0) \quad (\forall n \geq n_0) \quad f^n(P_i) \subset D_{\rho''}. \quad \text{Cqfd.}$$

II - Cas des polynômes

On suppose dans cette partie que f est un polynôme monique de degré d ayant en 0 un point fixe d'ordre $r \geq 2$. Soient P_1, \dots, P_{r-1} les pétales de f en 0.

1. Composante de $\overset{\circ}{K}_f$ contenant un pétale

Le point 0 appartient à $J_f = \partial K_f$. En effet, si $f(z) = z + bz^r + \mathcal{O}(|z|^{r+1})$, on a : $f^n(z) = z + nbz^r + \mathcal{O}(|z|^{r+1})$, et la suite $((f^n)^{(r)}(0))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

Pour chaque i , $P_i \setminus \{0\} \subset \overset{\circ}{K}_f$. En effet $P_i \subset K_f$ et $f(P_i \setminus \{0\}) \subset \overset{\circ}{P}_i \subset \overset{\circ}{K}_f$. Comme l'ensemble $P_i \setminus \{0\}$ est connexe, il est contenu dans une composante connexe U_i de $\overset{\circ}{K}_f$.

Proposition 3. — Pour tout $x \in U_i$, il existe un n tel que $f^n(x) \in P_i \setminus \{0\}$.

Démonstration. — Soient $x_0 \in U_i$ et $y_0 \in P_i$. Posons $x_n = f^n(x_0)$ et $y_n = f^n(y_0)$. On a, pour les distances de Poincaré, $d_{U_i}(x_n, y_n) \leq d_{U_i}(x_0, y_0)$, et pour les distances euclidiennes $d(y_n, \partial U_i) \leq |y_n| \rightarrow 0$. Par suite, $|x_n - y_n| \rightarrow 0$ et $|x_n| \rightarrow 0$.

Si ρ' est assez petit, on a $|(f(z))| > |z|$ si $z \in D_{\rho'} \setminus \bigcup P_j$. Les x_n ne peuvent donc pas être tous dans les interpétales, et $\exists n_0, \exists j, x_{n_0} \in P_j \setminus \{0\}$. On a alors $x_n \in \overset{\circ}{P}_j \setminus \{0\}$ pour $n > n_0$.

Notons V_j l'ensemble des $x \in U_i$ tels que $(\exists n) x_n \in \overset{\circ}{P}_j \setminus \{0\}$. Les V_j forment une partition de U_i en ouverts. Comme U_i est connexe, un seul n'est pas vide, et comme $P_i \setminus \{0\} \subset V_i$, on a $U_i = V_i$. Cqfd.

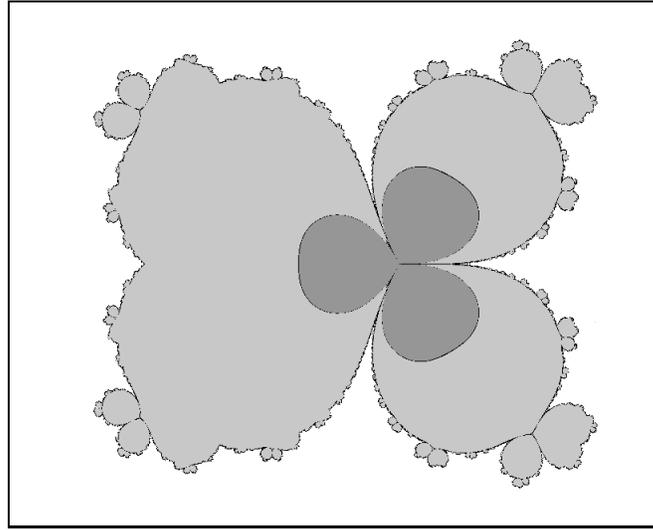


FIGURE 3. Le polynôme $f(z) = z + z^4 + z^5$ a un point fixe d'ordre 4 en 0. Les trois pétales sont contenus dans des composantes distinctes de $\overset{\circ}{K}_f$.

Corollaire. — Les U_i sont deux à deux distincts.

Proposition 4

- a) U_i contient au moins un point critique de f .
- b) f induit une application holomorphe propre $f_i : U_i \rightarrow U_i$ de degré $d_i \geq 2$.
- c) Soit $\varphi : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ un isomorphisme et posons $g = \varphi \circ f_i \circ \varphi^{-1}$. Alors, g est la restriction à \mathbb{D} d'une fonction rationnelle $g : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ayant sur S^1 un point fixe triple α . Pour tout $x \in \overline{\mathbb{C}} - S^1$, la suite $g^n(x) \rightarrow \alpha$.

Lemme. — Soit $x_0 \in U_i$ et posons $x_n = f^n(x_0)$. Alors, $d_{U_i}(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$.

Démonstration. — $x_n \rightarrow 0$ tangentiellement à l'axe de P_i , donc $\exists m > 0$, $\exists n_0$, $\forall n \geq n_0$, $d(x_n, \partial U_i) \geq m|x_n|$ (en fait, on peut prendre m arbitrairement voisin de $\sin \pi/(r-1)$ si $r \geq 3$, $m = 1$ si $r = 2$).

Pour $m' > |b|$, on a $|x_{n+1} - x_n| \leq m'|x_n|^r$ pour m assez grand. Par suite,

$$\frac{|x_{n+1} - x_n|}{d(x_n, \partial U_i)} \rightarrow 0.$$

Or,

$$d_{U_i}(x_n, x_{n+1}) \leq d_{D(x_n, d(x_n, \partial U_i))}(x_n, x_{n+1}) = d_{\mathbb{D}}\left(0, \frac{x_{n+1} - x_n}{d(x_n, \partial U_i)}\right),$$

d'où $d_{U_i}(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$.

Cqfd.

Démonstration de la proposition. — b) L'application f induit une application holomorphe propre $f^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$. Or, U_i est une composante connexe de $f^{-1}(U_i)$, donc f induit $f_i : U_i \rightarrow U_i$ holomorphe propre. Soit d_i son degré. On a $d_i > 1$ car sinon f_i serait une isométrie pour la distance de Poincaré de U_i , ce qui est contredit par le lemme.

a) résulte de b) et de la formule de Riemann-Hurwitz. Plus élémentairement, s'il n'y avait pas de point critique, $f_i : U_i \rightarrow U_i$ serait un revêtement nécessairement trivial puisque U_i est simplement connexe, donc de degré 1.

c) L'application $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ est holomorphe et propre. Par le principe de réflexion de Schwarz, elle se prolonge en une application $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, qui est une fraction rationnelle commutant avec $z \rightarrow 1/\bar{z}$. Montrons qu'il y a un point triple sur S^1 . Soit $x_0 \in \mathbb{D}$ et posons $x_n = g^n(x)$. Tout point d'accumulation α de la suite (x_n) appartient à S^1 et est un point fixe de g . En effet, si $x_{n_k} \rightarrow \alpha$, on a $|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| \leq d_{\mathbb{D}}(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \rightarrow 0$, et $g(x_{n_k}) \rightarrow \alpha$ d'où $\alpha = g(\alpha)$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ les points fixes de g sur S^1 , W_1, \dots, W_ν des voisinages de $\alpha_1, \dots, \alpha_\nu$ respectivement tels que $d_{\mathbb{D}}(W_i \cap \mathbb{D}, W_j \cap \mathbb{D}) > d_{\mathbb{D}}(x_0, x_1)$. À partir d'un certain rang, tous les x_n sont dans la réunion des W_i , mais comme on a $d_{\mathbb{D}}(x_n, x_{n+1}) < d_{\mathbb{D}}(x_0, x_1)$, ils sont tous dans le même, et la suite n'a qu'un seul point d'accumulation $\alpha \in S^1$. Comme $\overline{\mathbb{D}}$ est compact, $x^n \rightarrow \alpha$.

Comme $d_{\mathbb{D}}(x_n, x_{n+1}) \rightarrow 0$, on a $\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - \alpha} \rightarrow 0$ et α est un point fixe multiple. Soit $y_0 \in \mathbb{D}$ et posons $y_n = g^n(y_0)$. On a $d_{\mathbb{D}}(x_n, y_n) < d_{\mathbb{D}}(x_0, y_0)$; comme $|x_n - \alpha| \rightarrow 0$, on a $|y_n - x_n| \rightarrow 0$ et $y_n \rightarrow \alpha$.

Soit s l'ordre de α comme point fixe de g ; montrons que $s = 3$. Soient Q_1, \dots, Q_{s-1} les pétales de g en α . Au moins la moitié d'entre eux rencontre \mathbb{D} . Mais les $V_i = \{x \in \mathbb{D} \mid g^n(x) \in Q_i \setminus \{\alpha\}\}$ forment une partition de \mathbb{D} en ouverts, donc il y en a au plus 1 non vide et $s - 1 \leq 2$, d'où $s = 2$ ou 3.

Posons $z_n = \varphi^{-1}(x_n) \in U_i$. La suite $z_n \rightarrow 0$ tangentiellement à l'axe de P_i . Si $\eta : \overline{U}_i \rightarrow [0, 1]$ est une fonction harmonique sur \overline{U}_i , continue sur $U_i \setminus \{0\}$, valant 0 sur ∂U_i dans un interpétale adjacent à P_i et 1 dans l'autre, ($\exists m > 0$) ($\forall n$) $m \leq \eta(z_n) \leq 1 - m$. Par suite, $x_n \rightarrow \alpha$ non tangentiellement à S^1 , ce qui exclut le cas $s = 2$. On a donc $s = 3$. Cqfd.

Corollaire 1. — Si $d_i = 2$, il n'y a qu'un point critique $\omega \in U_i$. Si on a pris φ tel que $\varphi(\omega) = 0$ et $\alpha = 1$, alors g est donnée par $g(z) = \frac{3z^2 + 1}{z + z^2}$.

2. Arguments externes de 0

Proposition 5. — On suppose que K_f est connexe et localement connexe.

- a) Tout argument externe de 0 est de la forme $p/(d - 1)$.
- b) Dans chaque interpétale arrive au moins un rayon externe qui aboutit en 0.

c) Entre deux rayons externes aboutissant en 0, il y a un point critique et une valeur critique de f .

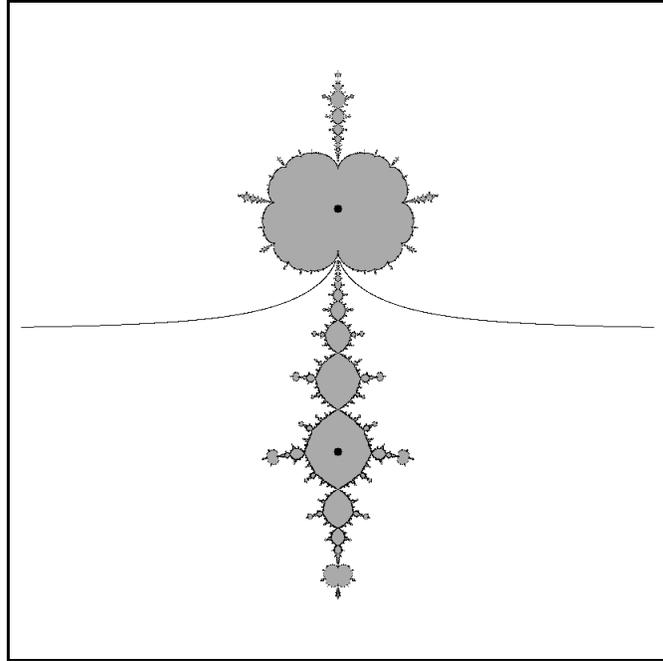


FIGURE 4. L'ensemble de Julia rempli d'un polynôme cubique ayant un point fixe multiple. Les points critiques sont indiqués.

Lemme. — Soit $A \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un ensemble contenant au moins un point α de la forme $p/(d-1)$, $p \in \mathbb{Z}$. On suppose que $t \mapsto dt$ induit une bijection de A sur A préservant l'ordre cyclique. Alors, tout point de A est de la forme $p/(d-1)$, $p \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. — On a $(d-1)\alpha = 0$, donc $d\alpha = \alpha$, et $t \mapsto t - \alpha$ commute avec $t \mapsto dt$. On peut donc prendre α comme origine, *i.e.* supposer que $\alpha = 0$. Soit $t \in A$ et soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dots)$ le développement de t en base d . Si la suite (ε_i) est stationnaire, $\varepsilon_i = \varepsilon$ pour $i \geq k_0$, on a :

$$d^k t = \frac{\varepsilon}{d-1} \in A, \quad d^k \frac{\varepsilon}{d-1} = \frac{\varepsilon}{d-1} = d^k t,$$

d'où $t = \frac{\varepsilon}{d-1}$. Sinon $\exists i, j$ tels que $\varepsilon_i < \varepsilon_{i+1}$ et $\varepsilon_j > \varepsilon_{j+1}$. Choisissons pour tout élément de A le représentant dans $[0, 1[$. On a $0 < d^i t < d^{i+1} t$ et $0 < d^{j+1} t < d^j t$, ce qui est en contradiction avec le fait que $t \mapsto d^{j-1} t$ préserve l'ordre cyclique. Cqfd.

Démonstration de la proposition. — a) Notons A l'ensemble des arguments externes de 0 . Supposons $A \neq \emptyset$ et soit $t \in A$ et α le plus petit élément de A correspondant à un rayon \mathcal{R}_α qui arrive dans le même interpétale que \mathcal{R}_t . Le rayon \mathcal{R}_α est stable par f , donc $\alpha = d\alpha$ et α est de la forme $p/(d-1)$. L'application f induit des permutations des $(\mathcal{R}_t)_{t \in A}$ préservant l'ordre cyclique. La partie a) résulte alors du lemme.

b) Choisissons dans chaque pétale P_i un centre c_i pour U_i et soit H l'enveloppe réglementaire de $\{0, c_1, \dots, c_{r-1}\}$. Les interpétales sont les accès à 0 relativement à H (cf. exposé « arguments externes dans les ensembles de Julia »). La partie b) résulte alors de la proposition 1 dudit exposé.

c) Soient $R = \overline{\mathcal{R}}(K_f, \theta)$ et $R' = \overline{\mathcal{R}}(K_f, \theta')$ deux rayons externes de K_f aboutissant en 0 , et V une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus (R \cup R')$. D'après la partie a), on peut supposer que $\theta = 0$, $\theta' = p/(d-1)$, $p \in \{1, \dots, d-2\}$, et que V contient les points de $\mathbb{C} \setminus K_f$ d'argument externe $t \in]0, p/(d-1)[$. Posons $W = f^{-1}(V)$. Le bord ∂W est la réunion des $\mathcal{R}(K_f, t)$ pour $t \in \{\frac{i}{d}, \frac{p}{d-1} + \frac{i}{d}\}_{i=0, \dots, d-1}$. Soit W_1 la composante connexe de W telle que $\partial W_1 \supset R$. On a $W_1 \subset V$ et $\partial W \supset R \cup \mathcal{R}(K_f, t_1)$ où $t_1 = \frac{p}{d-1} - \frac{p}{d} = \frac{p}{d(d-1)}$. Le rayon $R_1 = \mathcal{R}(K_f, t_1)$ aboutit en un point $c_1 \neq 0$ puisque $t_1 \notin \mathbb{Z} \cdot \frac{1}{d-1}$. L'application f induit une application holomorphe propre $f_1 : W_1 \rightarrow V$, notons d_1 son degré. Soit U un voisinage de 0 , alors $f^{-1}(U \cap W) \supset (U' \cap W) \cup (U'' \cap W)$ où U' est un voisinage de 0 et U'' un voisinage de c_1 , qu'on peut supposer disjoints. Par suite, $d_1 \geq 2$, donc $(\exists \omega \in W_1) f'(\omega) = 0$ et $f(\omega) \in W$. Cqfd.

III - Points périodiques indifférents rationnels

Nombre de pétales

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme de degré d , α un point périodique de période k , tel que $\lambda = (f^k)'(\alpha) = e^{2i\pi p/q}$, p.g.c.d.(p, q) = 1.

Proposition 6. — *La multiplicité r de α comme point fixe de f^{kq} est de la forme $\nu q + 1$, où $\nu \in \{1, \dots, d-1\}$.*

Démonstration. — L'application $T_\alpha f^k$, qui est la multiplication par ρ , opère librement sur les axes de répulsion en α . Leur nombre, qui est $r-1$, est donc de la forme $q\nu$. Il y a ν orbites disjointes dans $\pi_0(\overset{\circ}{K}_f)$, et chacune contient au moins un point critique de f^{kq} , donc un point critique de f . Comme f a au plus $d-1$ points critiques, on a $\nu \leq d-1$. Cqfd.

On pourrait aussi déduire la proposition 6 du lemme suivant, que nous donnons car il nous servira par la suite.

Lemme 1. — On peut trouver une coordonnée holomorphe centrée en α telle que l'expression de f^k dans cette coordonnée soit de la forme $\zeta \mapsto \lambda(\zeta + \zeta^r + \mathcal{O}(\zeta^{r+1}))$, avec $r = \nu q + 1$, $\nu \in \mathbb{N}^*$

Autrement dit, on peut trouver un difféomorphisme \mathbb{C} -analytique, ψ d'un voisinage de α sur un voisinage de 0, avec $\psi(\alpha) = 0$, tel que $\psi \circ f^k \circ \psi^{-1}$ soit de la forme prescrite.

Démonstration. — Nous allons montrer que, si on a une coordonnée ζ_j où l'expression g_j de f^k est $\zeta \mapsto \lambda\zeta + b_j\zeta^j + \mathcal{O}(\zeta^{j+1})$, et si j n'est pas de la forme $\nu q + 1$, on peut trouver une coordonnée ζ_{j+1} , tangente à l'ordre j à ζ_j , telle que l'expression g_{j+1} de f^k dans ζ_{j+1} soit $\zeta \mapsto \lambda\zeta + b_{j+1}\zeta^{j+1} + \mathcal{O}(\zeta^{j+2})$. Prenons $\zeta_{j+1} = \zeta_j + c\zeta_j^j$. L'application g_{j+1} est donnée par :

$$\begin{aligned} \zeta_{j+1} &\longmapsto \zeta_j = \zeta_{j+1} - c\zeta_{j+1}^j + \cdots \xrightarrow{g_j} \lambda\zeta_{j+1} + (b_j - \lambda c)\zeta_{j+1}^j + \cdots \\ &\longmapsto g_{j+1}(\zeta_{j+1}) = \zeta_{j+1} + (b_j - \lambda c + c\lambda^j)\zeta_{j+1}^j + \mathcal{O}(\zeta_{j+1}^{j+1}). \end{aligned}$$

Si j n'est pas de la forme $\nu q + 1$, on a $\lambda^j - \lambda \neq 0$, et on peut choisir c de façon que $b_j + c(\lambda^j - \lambda) = 0$.

On peut ainsi chasser de proche en proche le premier terme de $g_j(\zeta) - \lambda\zeta$ jusqu'à ce que l'on tombe sur un terme de la forme $b\zeta^{\nu q+1}$ avec $b \neq 0$. Si le processus ci-dessus se poursuivait indéfiniment, f^{kq} aurait un contact d'ordre ∞ avec l'identité, donc $f^{kq} = \text{id}$, ce qui est impossible si f est un polynôme de degré $d > 1$. On peut donc trouver une coordonnée ζ telle que l'expression de f^k soit $\zeta \mapsto \lambda\zeta + b\zeta^{\nu q+1} + \mathcal{O}(\zeta^{\nu q+2})$ avec $b \neq 0$, et en conjuguant par une homothétie on peut obtenir $b = \lambda$. Cqfd.

Soit ψ un difféomorphisme d'un voisinage de α sur un voisinage de 0. Une fleur F de f^{kq} relativement à ψ est $F = \psi^{-1}(F')$, où F' est une fleur (réunion de pétales) de $\psi \circ f^{kq} \circ \psi^{-1}$.

Proposition 7. — Soit ζ une coordonnée centrée en α satisfaisant aux conditions du lemme 1, et F la fleur de f^{kq} relativement à ζ définie à partir d'une courbe Γ comme dans 3. Pour un choix convenable de Γ , on a $f^k(F) \subset \overset{\circ}{F} \cup \{\alpha\}$.

Démonstration. — Reprenons le changement de variables $h : D_\rho \xrightarrow{\cong} \tilde{\Omega}$ défini en 2, avec $b = 1$. Notons σ l'application de changement de feuillet $\tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}$ conjuguée par h de $z \mapsto \lambda z$. L'expression $F = h \circ f^k \circ h^{-1}$ de f^k est de la forme $Z \mapsto \sigma(Z - 1 + \mathcal{O}(1/|Z|^{1/r-1}))$. Si Γ satisfait aux conditions (i) à (v), on a $F(G_i) \subset \tau_{-1/2} \overset{\circ}{G}_{\sigma(i)}$, d'où $f(P_i - \alpha) \subset \overset{\circ}{P}_{\sigma(i)}$. Cqfd.

Remarque. — La condition (iv) est plus forte que la condition normalement exigée pour définir la fleur de f^{kq} , car f^{kq} correspond à $b = q$ et non $b = 1$.

EXPOSÉ X

CONNEXITÉ LOCALE DE CERTAINS AUTRES ENSEMBLES DE JULIA

1. Résultat

Théorème. — Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polynôme de degré $d > 1$. On suppose que, pour tout point critique ω de f , l'une des trois éventualités suivantes se produit :

- a) ω est attiré par un cycle attractif;
- b) ω tombe en un temps fini sur un cycle répulsif;
- c) ω est attiré par un cycle indifférent rationnel.

Alors, K_f est connexe et localement connexe.

Corollaire. — Soit f un polynôme de degré 2 admettant un cycle indifférent rationnel. Alors, K_f est connexe et localement connexe.

Cet exposé est un complément à l'exposé III « Connexité locale de certains ensembles de Julia ». Nous utiliserons les résultats de l'exposé IX « Points fixes multiples et points périodiques indifférents rationnels ».

D'après un théorème de Fatou et/ou Julia, comme tout point critique de f appartient à K_f , l'ensemble K_f est connexe (III Proposition 1 étendue). Le cas où seules les éventualités a) et b) se présentent est couvert par la Proposition 4 de III + Caractérisation des polynômes sous-hyperboliques. Dans le cas où c) se présente effectivement, f n'est pas sous-hyperbolique. Pour montrer que K_f est localement connexe, nous montrerons que la suite (γ_n) de lacets définie dans la Proposition 3 de III converge uniformément. Pour cela, nous allons construire, sur une partie Ω de \mathbb{C} une métrique pour laquelle f est strictement (*i.e.* augmente strictement la longueur de toute courbe rectifiable non triviale) mais non fortement dilatante en général. Le raisonnement que nous aurons à faire pour terminer la démonstration sera donc plus délicat que celui de la démonstration de la Proposition 4 de III : nous serons amenés à faire quelque chose comme une partition de Markov.

Dans la suite, f sera un polynôme satisfaisant aux hypothèses du Théorème.

2. Constructions de Ω

Notons A_- l'ensemble des points périodiques attractifs de f , A_0 l'ensemble des points périodiques indifférents rationnels et C la réunion des orbites directes des points critiques. Écrivons $C = C_- \cup C_0 \cup C_+$, où C_- (resp. C_0) correspond aux points critiques attirés par un cycle attractif (resp. indifférent rationnel) et C_+ aux points critiques tombant sur un cycle répulsif.

Proposition 1. — *On peut trouver un ensemble compact Ω tel que :*

- a) $\partial\Omega \supset A_0$, $\Omega \cap A_- = \emptyset$, $C_+ \subset \overset{\circ}{\Omega}$, $(C_0 \cup C_-) \cap \Omega = \emptyset$;
- b) $J_f \subset \overset{\circ}{\Omega} \cup A_0$, $\gamma_n \subset \overset{\circ}{\Omega}$ pour n assez grand ;
- c) $f^{-1}(\Omega) \subset \overset{\circ}{\Omega} \cup A_0$;
- d) $\overset{\circ}{\Omega}$ connexe ;
- e) $\overset{\circ}{\Omega} \cap \mathcal{R}(K_f, 0)$ connexe.

Démonstration. — Soit L un disque topologique fermé contenant K_f , limité par une courbe de niveau du potentiel G_f de K_f .

Choisissons pour chaque $\alpha \in A_-$, un disque topologique Δ_α de façon que $f(\overline{\Delta_\alpha}) \subset \Delta_\alpha$. Ceci entraîne $\overline{\Delta_\alpha} \subset \overset{\circ}{K}_f$. Soit n_- tel que $B_- = f^{-n_-}(\bigcup_{\alpha \in A_-} \Delta_\alpha) \supset C_-$. On a encore $\overline{B_-} \subset \overset{\circ}{K}_f$.

Pour chaque $\alpha \in A_0$, construisons une fleur F_α (relativement à une coordonnée ζ_α centrée en α) de façon que $f(F_\alpha \setminus \{\alpha\}) \subset \overset{\circ}{F}_{f(\alpha)}$. Soit n_0 tel que $B_0 = f^{-n_0}(\bigcup_{\alpha \in A_0} \Delta_\alpha) \supset C_0$. Ceci entraîne que $B_0 \subset \overset{\circ}{K}_f$ et $\overline{B_0} \subset \overset{\circ}{K}_f \cup A_0$. L'ensemble $\Omega = L \setminus (B_- \cup B_0)$ répond à la question. Cqfd.

3. Construction de \tilde{U}

Posons $U = \overset{\circ}{\Omega}$. Nous allons construire un revêtement ramifié \tilde{U} de U . Comme les points périodiques de C_+ sont répulsifs, donc non critiques, on peut trouver une fonction $\nu : C_+ \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que $\nu(f(x))$ soit multiple de $r(x)\nu(x)$, où $r(x)$ est le degré local de f en x (par exemple, $\nu(x) = \prod r(y)$, produit pour y dans l'orbite inverse stricte de x).

On pose $r(x) = 1$ pour $x \notin C_+$. Soient U^* un revêtement ramifié de U avec degré de ramification égal à $\nu(x)$ pour tout point au-dessus de x , et \tilde{U} le revêtement universel de U^* . Alors, \tilde{U} est un revêtement ramifié galoisien de U . Notons π la projection $\tilde{U} \rightarrow U$. Soit $\tilde{\mathcal{R}}_0$ un relèvement de l'arc ouvert $U \cap \mathcal{R}(K_f, 0)$ dans \tilde{U} .

Proposition 2. — *Il existe une application holomorphe $g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ telle que $f \circ \pi \circ g = \pi$ et $g(\tilde{\mathcal{R}}_0) \subset \tilde{\mathcal{R}}_0$.*

Remarque. — La condition $f \circ \pi \circ g = \pi$ exprime en quelque sorte que g est un relèvement de f^{-1} .

Démonstration. — Soit X l'ensemble des couples $(x, y) \in \tilde{U} \times \tilde{U}$ tels que $f(\pi(y)) = \pi(x)$. L'ensemble X est une courbe \mathbb{C} -analytique avec singularités. Soit $(x_0, y_0) \in X$. Si $\pi(x_0)$ n'appartient pas à C , $\pi(y_0)$ non plus, X est lisse en (x_0, y_0) et $\text{pr}_1 : X \rightarrow \tilde{U}$ est un isomorphisme local au voisinage de (x_0, y_0) . Supposons $\pi(x_0) \in C$, notons r le degré de ramification en $\pi(y_0)$ de f ; posons $\nu_{x_0} = \nu(\pi(x_0))$ et $\nu_{y_0} = \nu(\pi(y_0))$, $\deg_{y_0}(f \circ \pi) = r\nu_{y_0}$, qui est par hypothèse un diviseur de $\nu_{x_0} = \deg_{x_0} \pi$. On peut prendre sur \tilde{U} des coordonnées, ξ centrée en x_0 et η centrée en y_0 , telles que les expressions de π et $f \circ \pi$ soient $\xi \mapsto \xi^{\nu_{x_0}}$ et $\eta \mapsto \eta^{r\nu_{y_0}}$. Au voisinage de (x_0, y_0) , l'ensemble X devient $\{(\xi, \eta) \mid \xi^{\nu_{x_0}} = \eta^{r\nu_{y_0}}\} = \bigcup \{(\xi, \eta) \mid \eta = \lambda \xi^q\}$, où $q = \nu_{x_0}/r\nu_{y_0}$, la réunion étant prise sur les λ tels que $\lambda^{r\nu_{y_0}} = 1$. La courbe X est au voisinage de (x_0, y_0) réunion de $r\nu_{y_0}$ courbes lisses (branches), qui se coupent transversalement, et pour chacune la projection $\text{pr}_1 : X \rightarrow \tilde{U}$ induit un isomorphisme local.

En remplaçant le point (x_0, y_0) par $r\nu_{y_0}$ points, un sur chaque branche, et en procédant de même pour les autres points (x, y) tels que $\pi(x) \in C$, on obtient un espace \tilde{X} qui est un revêtement de \tilde{U} . Mais \tilde{U} est simplement connexe, ce revêtement est donc trivial. Soient x_1 et y_1 des points de $\mathcal{R}(K_f, 0) \cap U$ tels que $x_1 = f(y_1)$; notons \tilde{x}_1 et \tilde{y}_1 leur relèvement dans $\tilde{\mathcal{R}}_0$. Il existe une section unique $\sigma : \tilde{U} \rightarrow \tilde{X}$ telle que $\sigma(\tilde{x}_1) = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$. L'application $g = \text{pr}_2 \circ \pi_{\tilde{X}} \circ \sigma : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$, où $\pi_{\tilde{X}} : \tilde{X} \rightarrow X$ est la projection canonique, répond à la question. Cqfd.

4. Construction d'une métrique

Notons $\mu_{\tilde{U}}$ la métrique de Poincaré de \tilde{U} et μ_U la métrique riemannienne admissible sur U telle que la projection $\pi : \tilde{U} \rightarrow U$ soit une isométrie locale.

Remarques

1) Si $A_0 = \emptyset$, $\pi(g(\tilde{U}))$ est relativement compact dans U , il en résulte que $g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ est fortement contractante pour $\mu_{\tilde{U}}$. Par suite, f est fortement dilatante pour μ_U sur J_f , autrement dit f est sous-hyperbolique. Le théorème, dans ce cas, résulte alors de III, Proposition 4.

2) Si $A_0 \neq \emptyset$, l'application $g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ est strictement mais non fortement contractante. Soient $\alpha \in A_0$ et θ un argument externe de α dans K_f . L'arc ouvert $U \cap \mathcal{R}(K_f, \theta)$ a une longueur infinie du côté de α pour μ_U , et la suite $(\gamma_n(\theta))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une suite de Cauchy pour μ_U . C'est pour ces raisons que nous allons modifier la métrique μ_U .

On peut trouver pour chaque point $\alpha \in A_0$, un disque topologique Δ_α et un isomorphisme $\zeta_\alpha : \Delta_\alpha \rightarrow D_r$ de façon que l'expression de $f : \Delta_\alpha \rightarrow \Delta_{f(\alpha)}$ soit de la forme $\zeta \rightarrow \lambda(\zeta + b_\alpha \zeta^{q_\alpha+1} + \dots)$, $b_\alpha > 0$, $q_\alpha =$ nombre de pétales de la fleur de α , $\lambda^{q_\alpha} = 1$.

Si les disques Δ_α ont été pris assez petits, $U \cap \Delta_\alpha$ est contenu dans la réunion des interpétales, et l'expression de f a une dérivée de module > 1 . En outre, on a : $f(U \cap \Delta_\alpha) \supset U \cap \Delta_{f(\alpha)}$, $f(\overline{\Delta}_\alpha) \cap \overline{\Delta}_\beta = \emptyset$ pour $\beta \neq f(\alpha)$, et $\overline{\Delta}_\alpha \cap C_+ = \emptyset$.

Notons μ_α la métrique $|d\zeta_\alpha|$ sur Δ_α . Choisissons $M \in \mathbb{R}_+$ grand et définissons sur $U \cup \bigcup_{\alpha \in A_0} \Delta_\alpha$ une métrique riemannienne μ (à coefficient discontinu) par $\mu = \inf(\mu_U, M\mu_\alpha)$, la borne inférieure étant prise en chaque point z sur les métriques définies en ce point.

Considérons le compact $\Omega' = f^{-1}(\Omega) \subset U \cup A_0$.

Proposition 3. — *Si on a choisi M assez grand, f est strictement dilatante pour μ sur Ω' .*

Par « strictement dilatante », nous voulons dire que, pour tout chemin rectifiable non trivial $\gamma : I \rightarrow \Omega'$, on a $\text{long}_\mu(f \circ \gamma) > \text{long}_\mu(\gamma)$.

Démonstration. — Pour $\alpha \in A_0$, $f^{-1}(\Omega \cap \overline{\Delta}_\alpha)$ est un compact de la forme $L'_\alpha \cup L''_\alpha$, où $L'_\alpha \subset \Omega' \cap \Delta_\alpha$ et L''_α est un compact contenu dans $U \setminus C_+ = U \setminus C$. Posons $m_\alpha = \inf_{z \in L''_\alpha} \|T_z f\|_{\mu_U, \mu_\alpha}$. On a $m_\alpha > 0$. Nous choisissons $M > 1/\inf(m_\alpha)$. Montrons que, pour $z \in \Omega' \setminus (A_0 \cup C)$, on a :

$$(1) \quad \|T_z f\|_\mu > 1.$$

Il y a 4 cas à considérer :

a) $\mu_z = \mu_{U_z}$, $\mu_{f(z)} = \mu_{U, f(z)}$: L'application $f : f^{-1}(U) \rightarrow U$ est strictement dilatante pour μ_U puisque $g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ est strictement contractante, d'où (1) dans ce cas.

b) $\mu_z = M\mu_{\alpha, z}$, $\mu_{f(z)} = \mu_{U, f(z)}$: On a $\mu_z \leq \mu_{U, z}$, d'où (1) comme dans le cas a).

c) $\mu_z = M\mu_{\alpha, z}$, $\mu_{f(z)} = M\mu_{f(\alpha), f(z)}$: L'inégalité (1) résulte du fait que l'expression de M dans les coordonnées $\zeta_\alpha, \zeta_{f(\alpha)}$ a une dérivée > 1 en module.

d) $\mu_z = \mu_{U_z}$, $\mu_{f(z)} = M\mu_{f(\alpha), f(z)}$: Si $z \in L'_\alpha$, on a $\mu_z \leq \mu_{\alpha, z}$, et on conclut comme dans le cas c). Si $z \in L''_\alpha$, l'inégalité (1) résulte de la condition $M > 1/m_\alpha$ imposée à M . Cqfd.

5. Un module de continuité

Posons $\Omega'^* = \Omega' \cup U = \Omega' \setminus A_0$, et soit $\tilde{\Omega}'^*$ l'image réciproque de Ω'^* dans \tilde{U} . Soit $\tilde{\mu}$ la métrique sur $\tilde{\Omega}'^*$ relevant la métrique μ sur Ω'^* . Notons $\tilde{\Omega}'$ le complété de $\tilde{\Omega}'^*$ pour $\tilde{\mu}$: il s'obtient en rajoutant un point au bout de chaque relèvement dans $\tilde{\Omega}'^*$ d'un interpétale en un point de A_0 .

L'application $g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ de la Proposition 2 induit une application $\tilde{\Omega}'^* \rightarrow \tilde{\Omega}'^*$ qui se prolonge en une application $\hat{g} : \tilde{\Omega}' \rightarrow \tilde{\Omega}'$, strictement contractante.

Proposition 4. — Il existe une application croissante $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, vérifiant $h(s) < s$ pour $s > 0$ et $s - h(s) \rightarrow +\infty$, telle que :

$$(\forall x, y \in \tilde{\Omega}') \quad d_{\tilde{\mu}}(g(x), g(y)) \leq h(d(x, y)).$$

Démonstration. — Le groupe $\Gamma = \text{Aut}_U(\tilde{U})$ opère sur $\tilde{\Omega}'$ par des isométries pour $\tilde{\mu}$. Soit $\gamma_0(0) \in \mathcal{R}(K_f, 0) \cap U$ (cf. III, Proposition 3); notons \tilde{e} le relèvement de e dans $\tilde{\mathcal{R}}_0$, $\tilde{\gamma}_0$, le relèvement de γ_0 d'origine \tilde{e} , et posons $\tilde{e}_1 = \tilde{\gamma}_0(1)$. Notons σ l'élément de Γ tel que $\sigma(\tilde{e}) = \tilde{e}_1$. Il existe un élément $\sigma_1 \in \Gamma$ tel que $g \circ \sigma^d = \sigma_1 \circ g$. Soit $F \subset \tilde{\Omega}'$ un compact tel que $\Gamma \cdot F = \tilde{\Omega}'$ et posons $F_1 = \bigcup_{0 \leq i \leq d-1} \sigma^i F$. Pour $s \geq 0$, notons $B(F_1, s) = \{x \in \tilde{\Omega}' \mid d_{\tilde{\mu}}(x, F_1) \leq s\}$, c'est un compact. Notons $h(s)$ la borne supérieure des $d_{\tilde{\mu}}(g(x), g(y))$ pour $(x, y) \in \tilde{\Omega}$, $d_{\tilde{\mu}}(x, y) \leq s$. On a :

$$h(s) = \sup_{\substack{(x, y) \in F_1 \times B(F_1, s) \\ d_{\tilde{\mu}}(x, y) \leq s}} d_{\tilde{\mu}}(g(x), g(y)) < s.$$

Il est clair que la fonction h est croissante. Choisissons $s_0 > 0$. On a $h(ks_0) \leq kh(s_0)$, il en résulte que $s - h(s) \rightarrow +\infty$ quand $s \rightarrow +\infty$. Cqfd.

Notons E l'espace des lacets $\gamma : \mathbb{T} \rightarrow \tilde{\Omega}' \setminus (C_+ \cup A_0)$ tels que $\gamma(0) \in \mathcal{R}(K_f, 0)$, homotopes à γ_0 . On définit $G : E \rightarrow E$ en associant à chaque γ l'unique lacet $\gamma' \in E$ tel que $\gamma'(t) \in f^{-1}(\gamma(dt))$, $\gamma'(0) \in \mathcal{R}(K_f, 0)$. En particulier, $\gamma_{n+1} = G(\gamma_n)$. En associant à chaque lacet $\gamma \in E$ le chemin $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\Omega}'$ relevant γ , on identifie E à une partie de \tilde{E} de $\mathcal{C}(I; \tilde{\Omega}')$, où $I = [0, 1]$. À l'application G correspond une application $\tilde{G} : \tilde{E} \rightarrow \tilde{E}$, définie par $\tilde{G}(\tilde{\gamma}) = \tilde{\gamma}'$, avec :

$$\tilde{\gamma}^{-1}(t) = g(\sigma^i \tilde{\gamma}(s)) \quad \text{si } t = \frac{i+s}{d}, \quad s \in [0, 1].$$

On munit \tilde{E} de la distance $d(\gamma, \eta) = \sup_{t \in I} d_{\tilde{\mu}}(\gamma(t), \eta(t))$.

Corollaire. — L'application G admet comme module de continuité la même fonction h .

6. La convergence

Proposition 5. — La suite $(\tilde{\gamma}_n)$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(I; \tilde{\Omega}')$.

Démonstration. — Posons $\ell = d(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1)$, et soit $L \geq \ell$ tel que $L - h(L) \geq \ell$. Montrons, par récurrence que, pour tout n , on a $d(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1) \leq L$. C'est évident pour $n = 0$ ou 1. Si $d(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_1) \leq L$, on a $d(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_{n+1}) \leq h(L)$, d'où $d(\tilde{\gamma}_0, \tilde{\gamma}_{n+1}) \leq \ell + h(L) \leq L$.

Pour $p \in \mathbb{N}$ et $q = p + n$, on a : $d(\tilde{\gamma}_p, \tilde{\gamma}_q) = d(G^p(\tilde{\gamma}_0), G^p(\tilde{\gamma}_n)) \leq h^p(L)$. La suite $(h^p(L))_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement décroissante. Elle a une limite qui est un point fixe de h , donc $= 0$. Par suite, $(\tilde{\gamma}_n)$ est une suite de Cauchy. Cqfd.

Démonstration du théorème. — La suite (γ_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}(\mathbb{T}; \Omega')$, muni de la distance de la convergence uniforme, pour la distance d_μ sur Ω' . Elle converge donc uniformément pour d_μ , et aussi pour la distance euclidienne d_0 , qui définit la même topologie, puisque Ω' est compact. Le théorème résulte alors de la proposition 3 de III. Cqfd.

EXPOSÉ XI

UN TOUR DE VALSE

[C'est quand même mieux qu'un coup de fouet]

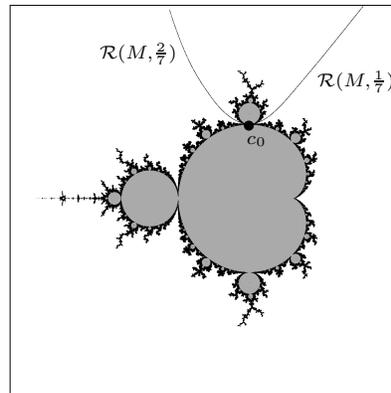
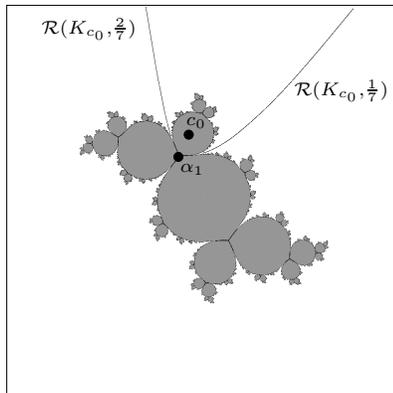
ADRIEN DOUADY & PIERRETTE SENTENAC

1. Introduction

Soit $c_0 \in M$ tel que le polynôme $f_{c_0} : z \mapsto z^2 + c_0$ admette un cycle indifférent rationnel $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, de valeur propre $\rho = e^{2i\pi p/q}$, $(p, q) = 1$. D'après l'exposé précédent X (Connexité locale de certains autres ensembles de Julia), K_{c_0} est localement connexe, et, d'après IX (points fixes multiples et points périodiques indifférents rationnels), chacun des α_i a une fleur à q pétales, et dans chaque interpétale arrive un nombre fini non nul de rayons externes de K_c , qui sont fixes par f^{kq} , donc ont des arguments de la forme $p/(2^{kq} - 1)$ (on verra plus tard que ce nombre est 2 si $q = 1$ et 1 sinon).

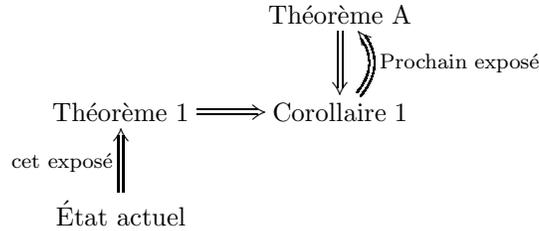
Le point c_0 , valeur critique, est attiré pour f^{kq} par un des points du cycle $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$. On peut supposer que c'est α_1 . La composante connexe U_1 de \mathring{K}_{c_0} qui contient c_0 contient aussi un pétale P_1 de α_1 . Nous avons en vue le résultat suivant, qui sera démontré dans l'exposé suivant.

Théorème A. — Soit θ l'argument d'un rayon externe de K_{c_0} qui aboutit en α_1 par un interpétale adjacent à P_1 . Alors, le rayon externe $\mathcal{R}(M, \theta)$ aboutit en c_0 .



Remarque. — Ce théorème fait pendant au Théorème 2 de VIII (Arguments externes dans M des points de Misurewicz). Cependant ce dernier est obtenu en passant à la limite à partir du Corollaire 2(b) du théorème 1 de VIII. Au contraire, le théorème A ci-dessus repose sur une discontinuité du comportement de $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ en $c = c_0$.

Nous démontrons dans cet exposé le théorème 1, dont un cas particulier (corollaire 1) est une conséquence du théorème A. Dans le prochain exposé du remonterons du corollaire 1 du théorème 1 au théorème A.



Supposons $q \neq 1$. Alors, α_1 est un point périodique simple de f_{c_0} . Pour tout c voisin de c_0 , on peut trouver un $\alpha(c)$ tel que $f_c^k(\alpha(c)) = \alpha(c)$ avec $c \mapsto \alpha(c)$ analytique et $\alpha(c_0) = \alpha_1$.

Soit Δ un disque centré en $\alpha(c_0)$, fixé assez petit (nous préciserons au §6 ou 7). Soient n_0 assez grand et $r^* > 1$ assez voisin de 1 pour que $x(c_0) = f_{c_0}^{n_0 k q}(c_0)$ et $y(c_0) = \varphi_{c_0}^{-1}(r^* e^{2i\pi\theta})$ appartiennent à Δ (où $\varphi_{c_0} : \mathbb{C} \setminus K_{c_0} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ est la représentation conforme).

Pour c voisin de c_0 , posons $x(c) = f_c^{n_0 k q}(c)$ et $y(c) = \varphi_c^{-1}(r^* e^{2i\pi\theta})$.

L'énoncé intermédiaire est le suivant :

Corollaire 1 du théorème 1. — *Pour tout voisinage W de c_0 dans \mathbb{C} , il existe un $N_0 \geq 0$ tel que, pour tout $N \geq N_0$, il existe un $c \in W$ tel que $f^{Nkq}(x(c)) = y(c)$.*

Démonstration de l'implication Théorème A \implies Corollaire 1 du Théorème 1

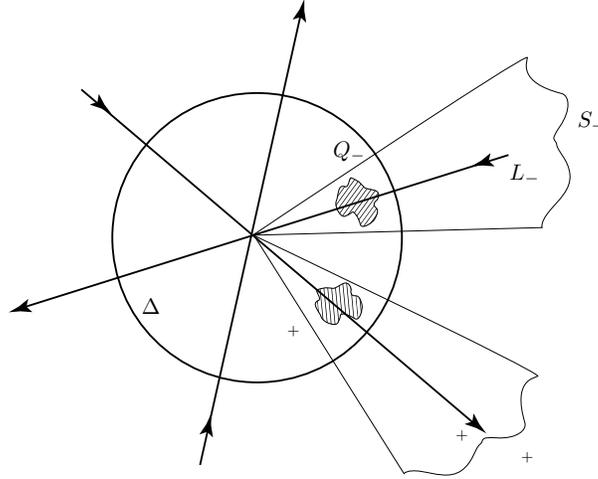
Soit r_N tel que $r_N^{2(n_0+N)kq} = r^*$ et $c = \varphi_M^{-1}(r_N e^{2i\pi\theta})$. On a $\varphi_c(c) = \varphi_M(c) = r_N e^{2i\pi\theta}$, et comme $2kq\theta = \theta$, $\varphi(x(c)) = r_N^{2n_0 k q} e^{2i\pi\theta}$, $\varphi_c(f^{Nkq}(x(c))) = r^* e^{2i\pi\theta}$, d'où $f^{Nkq}(x(c)) = y(c)$. Quand $n \rightarrow \infty$, $r_N \rightarrow 1$, donc $c \rightarrow c_0$ si on admet le théorème A, et $(\forall W) (\exists N_0) (\forall N \geq N_0) c \in W$. Cqfd.

2. Résultats

Voici maintenant l'énoncé du théorème dont la démonstration occupe cet exposé :

Soient Λ et V des voisinages de 0 dans \mathbb{C} , et $(\lambda, z) \mapsto g_\lambda(z)$ une application \mathbb{C} -analytique de $\Lambda \times V$ dans \mathbb{C} . On suppose que $g_\lambda(0) = 0$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, $g'_0(0) = \rho_0 = e^{2i\pi p/q}$, $p/q \in \mathbb{Q}$, et que $\lambda \mapsto \rho(\lambda) = g'_0(0)$ n'est pas constante. On suppose que g_0^q est de la forme $z \mapsto z + b_0 z^{q+1} + \mathcal{O}(z^{q+2})$ avec $b_0 \neq 0$. Soient L_+ et L_- un axe

de répulsion et un axe d'attraction de g^q en 0, consécutifs⁽¹⁾. Notons S_+ et S_- les secteurs angulaires ouverts de bissectrices L_+ et L_- respectivement d'ouverture $1/8q$ tour.



Théorème 1. — Dans cette situation,

$$\left(\begin{array}{c} \exists \Delta \\ \text{(disque centré en 0)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall Q_+ \subset \Delta \cap S_+ \\ \text{compact} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall Q_- \subset \Delta \cap S_- \\ \text{compact} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall W \\ \text{(vois. de 0 dans } \Lambda) \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} \exists N_0 \\ \in \mathbb{N} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall s_+ : W \rightarrow Q_+ \\ \text{continue} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall s_- : W \rightarrow Q_- \\ \text{continue} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \forall N \\ \geq N_0 \end{array} \right) (\exists \lambda \in W) \\ g_\lambda^{Nq}(s_-(\lambda)) = s_+(\lambda).$$

Démonstration du Corollaire 1 à partir du Théorème 1. — Si $q \neq 1$, α_1 est un point fixe simple de $f_{c_0}^k$. Posons $c(\lambda) = c_0 + \lambda$. On peut trouver une fonction analytique $\lambda \mapsto \alpha(\lambda)$ au voisinage de 0 telle que $\alpha(0) = \alpha_1$, $f_{c(\lambda)}^k(\alpha(\lambda)) = \alpha(\lambda)$, en vertu du théorème des fonctions implicites.

Si $q = 1$, c'est-à-dire $\rho = 1$, le point α_1 est un point fixe double de $f_{c_0}^k$, car il y a un seul pétale. Si on pose $c(\lambda) = c_0 + \lambda^2$, on peut encore trouver une application $\lambda \mapsto \alpha(\lambda)$ analytique au voisinage de 0, telle que $\alpha(0) = 1$ et $f_{c(\lambda)}^k(\alpha(\lambda)) = \alpha(\lambda)$. Cela résulte maintenant du lemme de Morse (ou du théorème de préparation de Weierstrass). Dans les deux cas, on définit g_λ par $\alpha(\lambda) + g_\lambda(z) = f_{c(\lambda)}^k(\alpha(\lambda) + z)$. On pose $s_-(\lambda) = x(c(\lambda)) - \alpha(\lambda)$, $s_+(\lambda) = y(c(\lambda)) - \alpha(\lambda)$. Si on a pris Δ assez petit, n_0 est assez grand et r_0 assez voisin de 1 pour que $s_-(0) \in S_-$ et $s_+(0) \in S_+$, puisque $f_{c_0}^{n_0 k q}$ et $\varphi_{c_0}^{-1}(re^{2i\pi\theta})$ tendent vers α_1 tangentiellement à L_- et L_+ respectivement.

⁽¹⁾ i.e. faisant un angle de $\pm 1/2q$ tour

Soient Q_- et Q_+ des voisinages compacts de $s_-(0)$ et $s_+(0)$ dans S_- et S_+ , on a encore $s_-(\lambda) \in Q_-$ et $s_+(\lambda) \in Q_+$ quand λ varie dans un voisinage Λ de 0. On peut donc appliquer le théorème 1, et on obtient le corollaire 1. Cqfd.

La démonstration ci-dessus donne au Corollaire 1 le complément suivant qui nous servira au prochain exposé :

Complément 1 du Corollaire 1 du Théorème 1. — On peut prendre N_0 indépendant de r^* quand r^* varie dans un compact $J \subset]0, +\infty[$ tel que

$$\varphi_{c_0}^{-1}(J \cdot e^{2i\pi\theta}) \subset \Delta \setminus \{0\}.$$

D'autre part, nous verrons que ; dans la situation du Théorème 1, si $\lambda \mapsto \rho(\lambda) - e^{2i\pi p/q}$ a en 0 un zéro d'ordre ν , il y a au moins ν valeurs distinctes de λ telles que $g_\lambda^{Nq}(s_-(\lambda)) = s_+(\lambda)$ dans les conditions du théorème.

Nous utiliserons ce fait au prochain exposé pour voir que, dans la situation du Théorème A, on a nécessairement $\nu = 1$.

3. Un changement de variables

Nous nous plaçons dans la situation du Théorème 1.

Proposition 1. — On peut trouver un difféomorphisme \mathbb{C} -analytique $(\lambda, z) \mapsto (\lambda, \zeta_\lambda(z))$ d'un voisinage $\Lambda' \times V'$ de $(0, 0)$ dans $\Lambda \times V$ sur un ouvert de $\Lambda' \times \mathbb{C}$, tel que $\zeta_\lambda(0) = 0$, et que pour tout $\lambda \in \Lambda'$, l'expression de g_λ dans la coordonnée ζ_λ soit de la forme : $\zeta \mapsto \rho(\lambda)\zeta + \beta(\lambda)\zeta^{q+1} + \mathcal{O}(\zeta^{q+2})$, avec $\beta(0) \neq 0$.

Démonstration (cf. IX, III.1, Lemme 1). — Pour $j \in \{2, \dots, q\}$, on a un difféomorphisme \mathbb{C} -analytique $(\lambda, z) \mapsto (\lambda, \zeta_{\lambda,j}(z))$ tel que l'expression de g_λ soit $\zeta \mapsto \rho(\lambda)\zeta + \beta_j(\lambda)\zeta^j + \mathcal{O}(\zeta^{j+1})$; en posant

$$\zeta_{\lambda,j+1} = \zeta_{\lambda,j} + \frac{\beta_j(\lambda)}{\rho(\lambda) - \rho(\lambda)^j} \zeta_{\lambda,j}^j$$

(le dénominateur ne s'annule pas au voisinage de 0), on obtient une coordonnée où l'expression de g_λ est de la forme : $\zeta \mapsto \rho(\lambda)\zeta + \beta_{j+1}(\lambda)\zeta^{j+1} + \mathcal{O}(\zeta^{j+2})$. Le difféomorphisme $(\lambda, z) \mapsto (\lambda, \zeta_{\lambda,q+1}(z))$ répond à la question ; on a bien $\beta_{q+1}(0) \neq 0$ sinon la fleur aurait au moins $2q$ pétales. Cqfd.

Corollaire. — L'expression de g_λ^q dans la coordonnée ζ_λ est de la forme :

$$\zeta \mapsto \rho(\lambda)^q \zeta + b(\lambda)\zeta^{q+1} + \mathcal{O}(\zeta^{q+2})$$

avec $b(0) \neq 0$.

En fait, $b = (\rho^q + \rho^{2q} + \dots + \rho^{q^2}) \cdot \beta$, $b(0) = q \cdot \beta(0)$.

Nous allons maintenant faire le changement de variable défini par l'application :

$$(\lambda, z) \mapsto \left(\lambda, \frac{\rho(\lambda)^{q(q+1)}}{qb(\lambda)\zeta^q} \right),$$

en reprenant les conventions de IX, I.2.

Si Δ est un disque, centré en 0, cette application définit un isomorphisme $h : \Lambda \times \Delta \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{\Omega}$, où $\tilde{\Omega}$ est un revêtement de degré q d'un ouvert Ω de $\Lambda \times \mathbb{C}$ de la forme $\Omega = \{(\lambda, z) \mid |z| > R(\lambda)\}$. Nous écrirons $h : (\lambda, z) \mapsto (\lambda, Z)$.

Proposition 2. — L'expression G_λ de g_λ^q dans la coordonnée Z est la forme : $Z \mapsto (1 + U_\lambda)Z - 1 - \eta(\lambda, Z)$, où $\eta(\lambda, Z)$ est $\mathcal{O}(1/|Z|^{1/q})$ quand $|Z| \rightarrow \infty$, uniformément en $\lambda \in \Lambda$.

Complément. — $\lambda \mapsto U_\lambda$ est une application analytique donnée par $1 + U_\lambda = 1/(\rho(\lambda))^{q^2}$. On a $U_0 = 0$, et la multiplicité ν de 0 comme zéro de $\lambda \mapsto U_\lambda$ est égale à sa multiplicité comme zéro de $\lambda \mapsto \rho(\lambda) - e^{2i\pi p/q}$.

Démonstration de la proposition. — Posons $\zeta_1 = \tilde{g}_\lambda^q(\zeta)$, où \tilde{g}_λ est l'expression de g_λ dans la coordonnée ζ , et soient Z et Z_1 correspondant à ζ et ζ_1 . On a :

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \rho(\lambda)^q \zeta + b(\lambda)\zeta^{q+1} + \dots \\ &= \rho(\lambda)^q \zeta (1 + b(\lambda)\rho(\lambda)^{-q}\zeta^q + \dots); \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} Z_1 &= \rho(\lambda)^{-q^2} Z (1 - qb(\lambda)\rho(\lambda)^{-q}\zeta^q + \dots) \\ &= \rho(\lambda)^{-q^2} Z \left(1 - \frac{\rho(\lambda)^{q^2}}{Z} + \dots\right) \\ &= \rho(\lambda)^{-q^2} Z - 1 + \dots \end{aligned} \quad \text{Cqfd.}$$

4. Valse des compacts

Soient K et K' deux compacts de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, T un espace homéomorphe à S^1 orienté (i.e. muni d'une classe d'homotopie d'homéomorphismes $S^1 \rightarrow T$), $(\varphi_t)_{t \in T}$ et $(\varphi'_t)_{t \in T}$ deux familles continues de plongements de K et K' respectivement dans \mathbb{R}^2 . On pose $K(t) = \varphi_t(K)$ et $K'(t) = \varphi'_t(K')$.

Définition. — On dit que $K(t)$ et $K'(t)$ valsent d tours⁽²⁾ quand t parcourt T si :

- a) $\forall t \in T, K(t) \cap K'(t) = \emptyset$.
- b) Quelles que soient les applications continues $t \mapsto z(t) \in K(t)$ et $t \mapsto z'(t) \in K'(t)$, l'application $t \mapsto \arg(z'(t) - z(t))$, de T dans $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, est de degré d .

⁽²⁾Le lecteur notera que les conventions habituelles d'orientation de \mathbb{R}^2 ne s'accordent pas avec les usages de la valse. Pour une fois, on dansera la valse à gauche.

Remarques

1) Si K et K' sont simplement connexes et si la condition (a) est vérifiée, il suffit de vérifier (b) pour un couple d'applications continues $t \mapsto (z(t), z'(t))$. En particulier, il existe toujours un d tel que $K(t)$ et $K'(t)$ valent d tours.

2) Supposons $T = \partial\Sigma$, où Σ est une pièce dans \mathbb{R}^2 , prolongeons $t \mapsto z(t)$ et $t \mapsto z'(t)$ en des applications continues $\Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2$. Si $d \neq 0$, il existe au moins un $t \in \overset{\circ}{\Sigma}$ tel que $z'(t) = z(t)$. En effet, sinon, l'application $t \mapsto \arg(z'(t) - z(t))$ pourrait se prolonger en une application continue $\Sigma \rightarrow \mathbb{T}$.

En identifiant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , si les prolongements $t \mapsto z(t)$ et $t \mapsto z'(t)$ sont holomorphes sur $\overset{\circ}{\Sigma}$, le nombre d est le nombre de zéros de $t \mapsto z'(t) - z(t)$ dans $\overset{\circ}{\Sigma}$, comptés avec leur multiplicité.

3) Soient Ω et Ω' deux ouverts simplement connexes de \mathbb{R}^2 et $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un homéomorphisme préservant l'orientation.

Supposons que $K(t) \subset \Omega$ et $K'(t) \subset \Omega$ pour tout t , et que $K(t)$ et $K'(t)$ valent d tours quand t parcourt T . Alors, $\Phi(K(t))$ et $\Phi(K'(t))$ valent d tours aussi. En effet, on peut supposer $T = \partial\Sigma$, où Σ est un disque dans \mathbb{R}^2 ; si $t \mapsto z(t) \in K(t)$ et $t \mapsto z'(t) \in K'(t)$ sont continues, on peut les prolonger en des applications continues $\Sigma \rightarrow \Omega$. Le nombre d est alors le nombre d'intersection dans $\Sigma \times \Omega$ des graphes de $t \mapsto z(t)$ et $t \mapsto z'(t)$. Il est préservé par $\text{Id} \times \Phi : \Sigma \times \Omega \rightarrow \Sigma \times \Omega'$.

Identifiant \mathbb{R}^2 à \mathbb{C} , nous dirons que $K(t)$ est à gauche (resp. à droite, au-dessus, au-dessous) de $K'(t)$ si, pour $z \in K(t)$ et $z' \in K'(t)$, on a $\text{Re}(z' - z) > 0$ (resp. < 0 , resp. $\text{Im}(z' - z) < 0$, resp. > 0).

Proposition 3. — *On suppose que $T = \partial\Sigma$, où $\Sigma = [-1, 1]^2$, et que pour*

- $t \in \{-1\} \times [-1, 1]$, $K(t)$ est à gauche de $K'(t)$,
- $t \in [-1, 1] \times \{-1\}$, $K(t)$ est au-dessous de $K'(t)$,
- $t \in \{1\} \times [-1, 1]$, $K(t)$ est à droite de $K'(t)$,
- $t \in [-1, 1] \times \{1\}$, $K(t)$ est au-dessus de $K'(t)$.

Alors, $K(t)$ et $K'(t)$ valent 1 tour.

Démonstration. — Les applications

$$t \mapsto \frac{t}{|t|} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{z'(t) - z(t)}{|z'(t) - z(t)|}$$

de T dans S^1 ne prennent jamais des valeurs opposées. Elles sont donc homotopes
Cqfd.

Pour démontrer le théorème 1, on pose $N = N' + N''$, où $N = [N/2]$ et $N'' = N'$ ou $N' + 1$; puis on construit dans Λ des pièces $\sigma_1, \dots, \sigma_\nu$, où ν est l'ordre de 0 comme zéro de $\lambda \mapsto \rho(\lambda) - e^{2i\pi p/q}$ telles que, quand λ parcourt $\partial\sigma_i$, $g\lambda^{N'q}(Q_-)$ et $g\lambda^{N'q}(Q_+)$ valent 1 tour.

Pour vérifier cette propriété, grâce à la remarque 3), on peut passer dans le plan des Z .

Dans l'espoir de faciliter la compréhension, nous ferons d'abord le calcul en négligeant le terme η de la Proposition 2, c'est-à-dire en remplaçant G_λ par $H_U : Z \mapsto (1+U)Z - 1$.

5. Étude de la famille (H_U)

On pose $H_U(Z) = (1+U)Z - 1$. L'application H_U est la similitude de centre $A = 1/U$ qui transforme 0 en -1 .

On se fixe $a \in]0, 1/2]$; on note P_a le carré $[-a, +a]^2$, *i.e.*

$$P_a = \{z \mid |\operatorname{Re} z| \leq a, |\operatorname{Im} z| \leq a\}$$

et $\Sigma_N + \{U \mid N \log(1+U) + 2\pi i \in P_a\}$. Le bord de Σ_N est de la forme $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ (voir la figure ci-dessous).

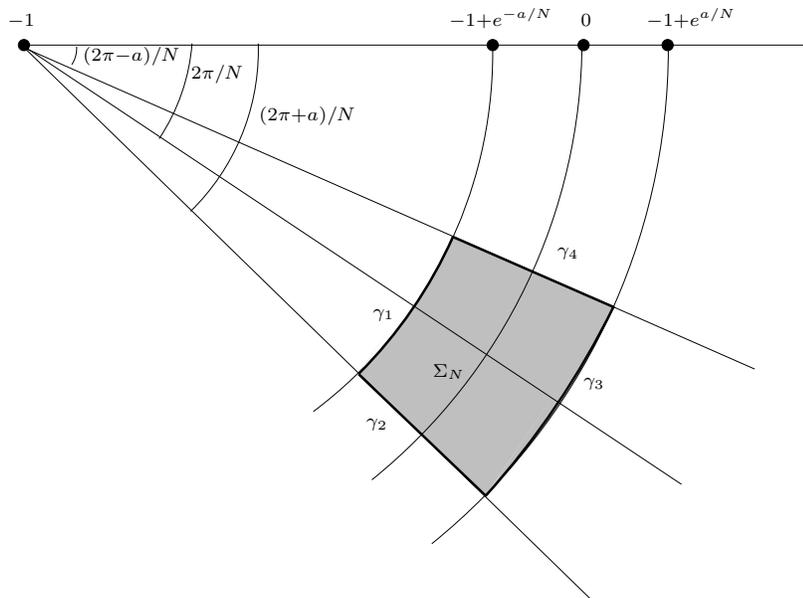


FIGURE 1. L'ensemble Σ_N .

Pour $N \geq 8$, on a : $\Sigma_N \subset D_{8/N} \setminus \overline{D}_{4/N}$ et $|\arg(iU)| < \frac{1}{12}$ tour = 30° si $U \in \Sigma_N$.

Proposition 4. — Soient Q_+ et Q_- deux compacts de \mathbb{C} , et notons δ le diamètre de $Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$. Soient $N > \sup(8, 12\delta/a)$, N' et N'' tels que $N' + N'' = N$.

Alors, $Q_-(U) = H_U^{N'}(Q_-)$ et $Q_+(U) = H_U^{-N''}(Q_+)$ valsent 1 tour quand U parcourt $\partial\Sigma_N$.

Démonstration. — Pour $A \subset \Sigma_N$, $z_- \in Q_-$ et $z_+ \in Q_+$, on a

$$\log \left| \frac{z_- - A}{z_+ - A} \right| = \left| \int_{z_-}^{z_+} \frac{dz}{z - A} \right| \leq \frac{\delta}{A - \delta} \leq \frac{\delta}{N/8 - \delta} < a.$$

Notons τ_{-A} la translation $Z \mapsto Z - A$, et Φ l'application $Z \mapsto \log Z$ sur $\mathbb{C} \setminus e^{+2i\pi(-N'/N+1/4)}\mathbb{R}_+$. On pose $\Phi_A = \Phi \circ \tau_{-A}$. Dire que $Q_-(U)$ et $Q_+(U)$ valsent d tours, ou que $\tau_{-A}(Q_-(U))$ et $\tau_{-A}(Q_+(U))$ valsent d tours est équivalent d'après la définition, et d'après la remarque 3 du §4, il est aussi équivalent de dire que $\Phi_A(Q_-(U))$ et $\Phi_A(Q_+(U))$ valsent d tours. Mais, pour U dans γ_1 , $\Phi_A(Q_-(U))$ est à gauche de $\Phi_A(Q_+(U))$, il est au-dessous pour $U \in \gamma_2$, à droite dans γ_3 et au-dessus dans γ_4 . D'après la Proposition 3, $\Phi_A(Q_-(U))$ et $\Phi_A(Q_+(U))$ valsent 1 tour. Cqfd.

6. Perturbation

Dans ce paragraphe, on se donne un voisinage Λ de 0 dans \mathbb{C} , un ouvert Ω de \mathbb{C} de la forme $\mathbb{C} \setminus (\overline{D}_R \cup -i\mathbb{R}_+)$, un $a \in]0, 1/2]$ et une famille $(G_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ d'applications holomorphes $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$, telle que :

$$G_\lambda(Z) = (1 + U_\lambda)Z - 1 + \eta(\lambda, Z) \text{ avec } |\eta(\lambda, Z)| < \frac{a}{100}, \text{ pour } (\lambda, Z) \in \Lambda \times \Omega.$$

On suppose que $\lambda \mapsto U_\lambda$ est une application holomorphe de Λ dans \mathbb{C} , avec $U_0 = 0$, et que G_λ est injective sur tout demi-plan ne rencontrant pas $-i\mathbb{R}_+$.

On note S_+ et S_- les secteurs angulaires d'ouverture $\frac{1}{6}$ tour, centrés sur \mathbb{R}_+ et \mathbb{R}_- respectivement. Soient $Q_+ \subset S_+ \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{2R})$ et $Q_- \subset S_- \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{D}_{2R})$ des compacts. On note δ le diamètre de $Q_+ \cup Q_- \cup \{0\}$. Pour $\lambda \in \Lambda$, on pose $A_\lambda = 1/U_\lambda$ et $H_\lambda(Z) = (1 + U_\lambda)Z - 1$. On définit Σ_N comme au paragraphe précédent.

Proposition 5. — Soient $N \geq \sup(8, 24\delta/a)$, $N' = [N/2]$ et $N'' = N - N'$. Soit $\sigma \subset \Lambda$ un compact tel que $\lambda \mapsto U_\lambda$ induise un homéomorphisme de σ sur Σ_N . Alors :

- Pour $\lambda \in \sigma$, $Q_-(\lambda) = G_\lambda^{N'}(Q_-)$ et $Q_+(\lambda) = G_\lambda^{-N''}(Q_+)$ sont définis.
- Quand λ parcourt $\partial\sigma$, les compacts $Q_-(\lambda)$ et $Q_+(\lambda)$ valsent 1 tour.

Pour faciliter l'exposition de la démonstration de cette Proposition, on prolonge $G_\lambda(Z) = H_\lambda(Z)$ pour $Z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. Ceci introduit des discontinuités, mais elles ne nous gêneront pas.

Fixons $\lambda \in \sigma$, posons $A = A_\lambda$, $U = U_\lambda$, $G = G_\lambda$, $H = H_\lambda$. Soient $Z_0^+ \in Q_+$ et $Z_0^- \in Q_-$, posons $Z_i^- = G^i(Z_0^-)$ et soit $Z_i^+ = G^{-i}(Z_0^+)$.

Lemme 1. — Pour $j \leq N''$, on a $|Z_j^+ - A| > \frac{1}{2}|A|$ et $|Z_j^- - A| > \frac{1}{2}|A|$.

Démonstration. — Écrivons Z_j pour Z_j^+ ou Z_j^- . On a $|Z_0 - A| \geq |A| - \delta$ et $\delta \leq Na/24$; on a aussi $N/8 < |A|$ car $U \in \Sigma_N \subset D_{8/N}$. Par suite,

$$|Z_0 - A| > \left(1 - \frac{a}{3}\right)|A| > e^{-a/2}|A|.$$

Puisque $Z_{j+1} - A = (Z_j - A)(1 + U) + \eta_j$ avec $|\eta_j| < a/100$ et $|1 + U| > e^{-a/N}$ (car $U \in \Sigma_N$), on a :

$$|Z_{j+1} - A| > e^{-a/N}|Z_j - A| - \frac{a}{100}.$$

Si $|Z_j - A| > \frac{1}{2}|A|$, on a $\frac{a}{100} < 0.16 \frac{a}{N}|Z_j - A|$, d'où

$$|Z_{j+1} - A| > \left(e^{-a/N} - 0.16 \frac{a}{N}\right)|Z_j - A| > e^{-(1.02)a/N}|Z_j - A|.$$

On a donc $|Z_j - A|/|A| \geq e^{-(1/2+1.02j/N)a}$ tant que cette quantité est $> 1/2$. Mais $N''/N < 0.5625$ pour $N \geq 8$, et pour $a = 1/2$, on obtient $1.71 \dots < 2$. On a donc $|Z_j - A|/|A| > \frac{1}{2}$ pour tout $j < N''$. Cqfd.

Lemme 2. — Pour $j \leq N''$, on a :

- a) $\left| \log \frac{Z_j^- - A}{Z_0^- - A} - j \log(1 + U) \right| \leq j \frac{a}{3N}$
- b) $\left| \log \frac{Z_j^+ - A}{Z_0^+ - A} + j \log(1 + U) \right| \leq j \frac{a}{3N}$
- c) $\left| \log \frac{Z_{N'}^- - A}{Z_{N''}^+ - A} - N \log(1 + U) \right| \leq \frac{3}{4}a.$

Démonstration de a) et b). — Écrivons Z_j pour Z_j^+ ou Z_k^- . On a

$$Z_{j+1} - A = (1 + U)^\varepsilon (Z_j - A) + \eta_j,$$

où $\varepsilon = \pm 1$ et $|\eta_j| < a/100$. D'où

$$\log(Z_{j+1} - A) = \log(Z_j - A) + \varepsilon \log(1 + U) + \log\left(1 + \frac{\eta_j}{(1 + U)^\varepsilon (Z_j - A)}\right).$$

On a $\left| \frac{\eta_j}{(1 + U)^\varepsilon (Z_j - A)} \right| \leq \frac{a/100}{\frac{1}{2} \cdot N/16} = 0.32 \frac{a}{N}$. Or, $|\log(1 + 0.32t)| \leq t/3$ pour $|t| \leq 1/16$. Par suite, $|\log(Z_{j+1} - A) - \log(Z_j - A) - \varepsilon \log(1 + U)| \leq a/3N$, d'où a) et b). Cqfd.

L'inégalité c) résulte de a) avec $j = N'$, b) avec $j = N''$ et

$$\left| \log \frac{Z_0^+ - A}{Z_0^- - A} \right| \leq \frac{\delta}{A - \delta} < \frac{Na/24}{N/8 - Na/24} < \frac{a/24}{1/8 - 1/48} = \frac{2}{5}a,$$

en remarquant que $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} < \frac{3}{4}$. Cqfd.

Démonstration de la Proposition 5

a) Soit l_0 le demi-angle sous lequel on voit D_R du point A (les angles sont comptés en tours). Posons $l_+ = \arg A - \frac{1}{2} + l_0$, $l_- = \arg A - \frac{1}{2} - l_0$,

$$E_+ = \{Z \mid \arg(Z - A) \in [l_+, l_+ + \frac{3}{4}]\} \quad \text{et} \quad E_- = \{Z \mid \arg(Z - A) \in [l_- - \frac{3}{4}, l_-]\}.$$

On a $E_- \subset \Omega$ et $G^j(Q_-) \subset E_-$ pour tout $j \leq N'$, donc $G^{N'}$ est défini et continu sur Q_- . On a $E_+ \subset G(\Omega)$ et G^{-1} admet une détermination holomorphe sur E_+ . Il résulte du lemme 2 que $G^{-j}(Q_+) \subset E_+$ pour $j \leq N''$, donc $G^{-N''}$ admet une détermination continue sur un voisinage de Q_+ .

b) Le complexe $L(\lambda) = \log \frac{Z_{N'}^-(\lambda) - A_\lambda}{Z_{N''}^+(\lambda) - A_\lambda}$ reste à une distance $\leq \frac{3}{4}a$ de $-N \log(1 + U_\lambda)$, ou, en changeant de détermination, de $-N \log(1 + U_\lambda) + 2i\pi$, qui fait un tour autour de 0 quand λ parcourt $\partial\sigma$, en restant à distance $\geq a$ de 0. Par suite, $L(\lambda)$ fait 1 tour autour de 0. Cqfd.

7. Démonstration du théorème 1

Plaçons-nous dans la situation du théorème 1, avec g_λ^q de la forme $\zeta \mapsto \rho(\lambda)^q \zeta + b(\lambda)\zeta^{q+1} + \mathcal{O}(\zeta^{q+2})$, ce qu'on peut supposer vu le corollaire de la Proposition 1. On suppose g_λ^q défini pour tout $\lambda \in \Lambda$ sur un disque Δ . On a $\arg L_- = \arg L_+ \pm 1/2q$ (l'autre cas s'en déduit en transformant tout la situation par $z \mapsto \bar{z}$). Soit

$$\Theta = \{z \in \Delta \setminus \{0\} \mid \arg z \in (\arg L_+ - 1/4q, \arg L_+ + 3/4q)\}.$$

Le changement de variables $z \mapsto Z$ induit un isomorphisme de Θ sur un ouvert Ω comme dans le § 6, et g_λ^q devient une fonction $G^\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ qui satisfait aux conditions de ce paragraphe, si on rétrécit Δ suffisamment, avec $U_\lambda = 1/\rho(\lambda)^{2q}$.

Si $\lambda \mapsto \rho(\lambda) - e^{2i\pi p/q}$ a en 0 un zéro de multiplicité ν , il en est de même de $\lambda \mapsto U_\lambda$, et si N est assez grand, on peut trouver ν compacts disjoints $\sigma_1, \dots, \sigma_\nu$, tels que $\lambda \mapsto U_\lambda$ induise pour chaque $i \in \{1, \dots, \nu\}$ un homéomorphisme de σ_i sur Σ_N .

Aux compacts Q_- et Q_+ de l'énoncé du théorème correspondent des compacts \mathcal{Q}_- et \mathcal{Q}_+ dans le plan des Z . Fixons $i \in \{1, \dots, \nu\}$. Si N assez grand, quand λ parcourt $\partial\sigma_i$, $G_\lambda^{N'}(\mathcal{Q}_-)$ et $G_\lambda^{-N''}(\mathcal{Q}_+)$ valent 1 tour, d'après la proposition 5; donc $g_\lambda^{N'q}(Q_-)$ et $g_\lambda^{-N''q}(Q_+)$ valent 1 tour d'après la remarque 3 du § 4, et il existe un $\lambda \in \sigma_i$ tel que :

$$g_\lambda^{N'q}(s_-(\lambda)) = g_\lambda^{-N''q}(s_+(\lambda)). \quad \text{Cqfd.}$$

8. Compléments

La démonstration du § 7 donne les compléments suivants :

Complément 1 au Théorème 1. — Soit ν la multiplicité de 0 comme solution de $\rho(\lambda) = e^{2i\pi p/q}$. Dans les conditions du théorème 1, il existe au moins ν valeurs distinctes de λ telles que : $g_\lambda^{Nq}(s_-(\lambda)) = s_+(\lambda)$.

Complément 2. — Les valeurs $\lambda_{N,1}, \dots, \lambda_{N,\nu}$ tendent vers 0 quand $N \rightarrow \infty$, uniformément si on varie s_+ et s_- .

Cela résulte de l'inégalité $|U_{\lambda_{N,i}}| < 8/N$ que l'on a puisque $U_{\lambda_{N,i}} \in \Sigma_N$.

Complément 3. — On a $|\arg U_{\lambda_{N,i}} - \varepsilon \frac{1}{4}| < \frac{1}{12}$ si $\arg L_- = \arg L_+ + \varepsilon/2q$, $\varepsilon = \pm 1$ (les arguments sont comptés en tours).

Cela résulte de $U_{\lambda_{N,i}} \in \Sigma_N$. En fait, on voit facilement que $|\arg U_{\lambda_{N,i}} - \varepsilon \frac{1}{4}| \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow \infty$.

Nous avons donné dans l'introduction un premier complément au Corollaire 1 du Théorème 1. En voici un autre, qui se déduit du Complément 1 au Théorème 1.

Si $q \neq 1$, α_1 est un point périodique simple de période k , pour c voisin de c_0 , il y a un point périodique $\alpha(c)$ de f_c de période k , qui dépend analytiquement de c , on pose $\rho(c)$ sa valeur propre et ν l'ordre de c_0 comme solution de $\rho(c) = e^{2i\pi p/q}$. Si $q = 1$, le point α_1 est double comme point périodique de période k , pour c voisin de c_0 , il a deux points $\alpha(c)$ et $\beta(c)$ périodiques de période k voisins de α_1 , et on définit ν par $(\alpha(c) - \beta(c))^2 \sim a(c - c_0)^\nu$, $a \neq 0$.

Complément 2 au Corollaire 1 du Théorème 1. — Dans les conditions du Corollaire 1 du Théorème 1, il y a au moins ν valeurs distinctes de c dans W telles que $f_c^{Nkq}(x(c)) = y(c)$.

Démonstration. — Dans le cas $q \neq 1$, cela résulte immédiatement du Complément 1 au Théorème 1.

Dans le cas $q = 1$, on fait le changement de paramètre $c_\lambda = c_0 + \lambda_2$, ce qui permet de choisir une détermination analytique pour $\lambda \mapsto \alpha(\lambda)$. L'application $\lambda \mapsto \rho(\lambda) - 1$ a en 0 un zéro d'ordre ν . Pour N assez grand, on trouve au moins ν valeurs de λ telles que $f_\lambda^{Nkq}(x(\lambda)) = y(\lambda)$ en considérant que $\arg L_- = \arg L_+ + 1/2$, et ν autres valeurs en considérant que $\arg L_- = \arg L_+ - 1/2$, soit 2ν en tout. À ces 2ν valeurs de λ correspondent ν valeurs distinctes de c . Cqfd.

EXPOSÉ XII

ARRIVER À BON PORT

1. Introduction

Cet exposé fait suite à XI « Un tour de valse ».

Soit $c_0 \in M$ tel que le polynôme $f_{c_0} : z \mapsto z^2 + c_0$ admette un cycle indifférent rationnel $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ de valeur propre $\rho = e^{2i\pi p/q}$. On suppose que la composante connexe U_1 de $\overset{\circ}{K}_{c_0}$ qui contient c_0 est attirée par α_1 et on note P_1 le pétale de α_1 contenu dans U_1 . Soit θ l'argument d'un rayon externe de K_{c_0} qui aboutit en α_1 par un interpétale adjacent à P . On a nécessairement $2^{kq}\theta = \theta$ (IX, II.2, Proposition 5, a)).

Pour $c \in \mathbb{C}$, notons \mathcal{G}_c la fonction potentiel $\mathbb{C} \setminus K_c \rightarrow \mathbb{R}_+$ (prolongée à \mathbb{C} par 0 sur K_c), et notons \mathcal{G}_M la fonction potentiel de M , définie par $\mathcal{G}_M(c) = \mathcal{G}_c(c)$.

Choisissons Δ , n_0 , r^* et définissons $x(c)$ comme en XI §2. Posons $I = [\frac{1}{2^{kq}}s^*, s^*]$, où $s^* = \log r^*$. Pour $s \in I^*$ et c tel que $\mathcal{G}_c(0)$, définissons $y(c, s)$ par $\arg_{K_c}(y(c, s)) = \theta$, $\mathcal{G}_c(y(c, s)) = s$. Soit W un disque centré en c_0 tel que, pour $c \in W$, on ait $x(c) \in \Delta$, $\mathcal{G}_c(0) < \frac{1}{2^{kq}}s^*$ et $(\forall s \in I^*) y(c, s) \in \Delta$. Définissons ν comme pour le Complément 2 du Corollaire 1 du Théorème 1 de XI, §8.

Dans l'exposé précédent, nous avons défini un $N_0 \in \mathbb{N}$ et construit, pour tout $N \geq N_0$ et tout $s \in I^*$, ν valeurs distinctes de c dans W telles que :

$$(2) \quad f_c^{Nkq}(x(c)) = y(c, s)$$

Plus précisément, la condition $|\arg U - \varepsilon \frac{1}{4}| < 1/12$ (cf. XI, Complément 3 au Théorème 1) définit ν secteurs S_1, \dots, S_ν dans W . Dans chacun d'eux, on trouve une valeur de c vérifiant (2).

Ayant choisi un de ces secteurs S , notons c_t la valeur de c trouvée dans S vérifiant (2) et s tels que $t = t_{N,s} = s/2^{(n_0+N)kq}$. Ceci permet de définir c_t pour $0 < t \leq t^* = s^*/2^{(n_0+N)kq}$. (Remarquons que si $t = t_{N,s^*/2^{kq}} = t_{N+1,s^*}$, la condition (2) pour $(N, s^*/2^{kq})$ entraîne (2) pour $(N+1, s^*)$.) D'après le Complément 2 au Théorème 1 de XI, $c_t \rightarrow c_0$ quand $t \rightarrow 0$.

Pour tout polynôme $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, et pour tout x et $y \in \mathbb{C}$, nous écrirons $x \sim_f y$ si $(\exists n) f^n(x) = f^n(y)$. Nous préciserons $x \sim_{f,n} y$ si $f^n(x) = f^n(y)$.

Pour $c \in \mathbb{C} \setminus M$, définissons $\omega(c) \in \mathbb{C} \setminus K_c$ par :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_c(\omega(c)) &= \mathcal{G}_c(c) \\ \arg_{K_c}(\omega(c)) &= \theta. \end{cases}$$

Pour $c = c_t$, on a $c \sim_{f_c} \omega(c)$. En effet, les points $f_c^{(n_0+N)kq}(c)$ et $f_c^{(n_0+N)kq}(\omega(c))$ ont même potentiel $2^{(n_0+N)kq}\mathcal{G}_c(c)$ et même argument externe θ par rapport à K_c , donc sont égaux.

Dans cet exposé, nous allons démontrer :

Théorème 1. — Pour $c = c_t$, avec $t \in]0, t^*]$ assez voisin de 0, on a :

$$\omega(c) = c.$$

Tirons tout de suite des conséquences :

Corollaire 1. — Pour $c = c_t$, avec $t > 0$ assez voisin de 0, on a : $c \in \mathbb{C} \setminus M$, $\arg_M(c) = \theta$ et $\mathcal{G}_M(c) = t$.

Corollaire 2. — On a : $\nu = 1$.

Sinon, il y aurait plusieurs points de $\mathbb{C} \setminus M$ ayant même potentiel et même argument externe par rapport à M .

Corollaire 3. — Le rayon externe $\mathcal{R}(M, \theta)$ aboutit en c_0

C'est le Théorème A annoncé en XI.

Donnons le plan de la démonstration du Théorème 1. Comme dans XI pour la démonstration du Complément 2 au Corollaire 1 du Théorème 1, on pose $c(\lambda) = c_0 + \lambda$ si $q \neq 1$ et $c(\lambda) = c_0 + \lambda^2$ si $q = 1$, ce qui permet de définir $\alpha(\lambda)$ dépendant analytiquement de λ quand λ parcourt un disque Λ centré en 0. On suppose que $\lambda \in \Lambda \Rightarrow c(\lambda) \in W$. Au secteur $S \subset W$ correspond un secteur $\tilde{S} \subset \Lambda$.

Nous allons construire pour chaque $c \in S$ un point $\check{\omega}(c)$ tel que $\check{\omega}(c) \sim_{f_c} c$. Puis nous montrerons d'une part que $\omega(c_t) = \check{\omega}(c_t)$ pour $t > 0$ assez voisin de 0, d'autre part que $\check{\omega}(c) = c$ pour $c \in S$ assez voisin de c_0 .

Aveux

(1) Pour les besoins de la démonstration, nous utiliserons non seulement le Théorème 1 de XI, son Corollaire et leurs compléments, mais aussi les inégalités de XI § 6-7, qui ont servi dans la construction de c_t .

(2) On se permettra éventuellement d'augmenter n_0 et de diminuer r^* (et donc s^*), ce qui aura pour effet de rétrécir W , d'augmenter N_0 et de diminuer t^* .

2. Définition de $\omega(c, \gamma)$

Soient W et n_0 comme au §1. Pour $c \in W$, on pose $x_n(c) = f_c^{(n_0+n)kq}(c) = f_c^{nkq}(x(c))$, et on note $\mathcal{C}(c)$ l'ensemble des $f^i(c)$ pour $0 \leq i < n_0kq$. Soit $\gamma : \mathbb{I} = [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un chemin de $x_1(c)$ à $x_0(c)$ tel que $\gamma(\mathbb{I}) \cap \mathcal{C}(c) = \emptyset$. Il existe alors un chemin unique $\tilde{\gamma} : [0, n_0 + 1] \rightarrow \mathbb{C}$ prolongeant γ et tel que $\tilde{\gamma}(t+1) \in f_c^{-kq}(\tilde{\gamma}(t))$ pour $t \in [0, n_0]$. On peut en effet définir $\tilde{\gamma}|_{[j, j+1]}$ par récurrence sur j , la condition $\gamma(\mathbb{I}) \cap \mathcal{C}(c) = \emptyset$ assurant que $\tilde{\gamma}([j-1, j+1])$ ne contient pas de valeur critique de f_c^{kq} pour $j \leq n_0$. On pose alors $\omega(c, \gamma) = \tilde{\gamma}(n_0 + 1)$. On a $\omega(c, \gamma) \sim_{f_c, n_0kq} c$. En effet, $f_c^{n_0kq}(\omega(c, \gamma)) = x(c) = f_c^{n_0kq}(c)$. Si γ est homotope à γ' parmi les chemins de $x_1(c)$ à $x_0(c)$ évitant $\mathcal{C}(c)$, on a $\omega(c, \gamma') = \omega(c, \gamma)$.

3. Le cylindre de Fatou-Ecalle

On se place dans les conditions du §7 de XI : le changement de variable $z \mapsto Z$ définit un isomorphisme d'un secteur Θ_λ de Δ sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus (D_R \cup -i\mathbb{R}_+)$, et, à g_λ déduit de $f_{c(\lambda)}^{kq}$ par le changement de variable $z \mapsto \zeta$, correspond pour la variable Z une application $G_\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme $G_\lambda = H_\lambda + \eta_\lambda$, où $H_\lambda(Z) = (1 + U_\lambda) \cdot Z - 1$ et $(\forall Z \in \Omega) |\eta_\lambda(Z)| \leq a/100$. On note A_λ le points fixe de H_λ , soit $A_\lambda = 1/U_\lambda$. On suppose $R > 1$, et on note Λ un disque tel que, pour $\lambda \in \Lambda$, on ait $c(\lambda) \in W$ et $|A_\lambda| > 4R$. L'application G_λ possède un point fixe A'_λ tel que $|A'_\lambda - A_\lambda| \leq |A_\lambda|/100$. Parfois nous écrirons A pour A_λ , etc.

Lemme 1. — Pour $Z \in \Omega$, on a :

$$\left| \log \frac{G(Z) - A'}{(1+U)(Z-A')} \right| \leq \frac{1}{10|A|}.$$

Démonstration

a) Cas où $|Z - A| \geq |A|/2$. On a :

$$\begin{aligned} \log \frac{H(Z) - A'}{(1+U)(Z-A')} &= \log \frac{H(Z) - A'}{(Z-A')} - \log \frac{H(Z) - A'}{(Z-A)} \\ &= \int_A^{A'} \frac{dt}{t - H(Z)} - \frac{dt}{t - Z} \\ &= \int_A^{A'} \frac{U(Z-A)}{(t - H(Z))(t - Z)} dt. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{H(Z) - A'}{(1+U)(Z-A')} \right| &\leq |A' - A| \cdot |U| \cdot \left| \frac{Z - A}{t - Z} \right| \frac{1}{|t - H(Z)|} \\ &\leq \frac{|A|}{100} \cdot \frac{1}{|A|} \cdot 1,03 \cdot \frac{1}{0,24|A|} \leq \frac{1}{20|A|}. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\log \left| \frac{G(Z) - A'}{H(Z) - A'} \right| \leq \frac{|\eta(Z)|}{|H(Z) - A' - \eta(Z)|} \leq \frac{0,01}{0,24|A|} \leq \frac{1}{20|A|},$$

d'où l'inégalité dans ce cas.

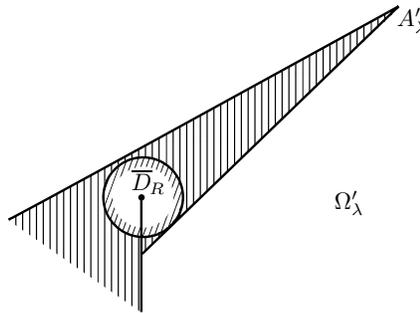
b) Cas où $|Z - A| \leq |A|/2$. Sur le disque $\mathcal{D} = D_{A,|A|/2}$, on a $|\eta'| \leq (2/100) \cdot 1/|A|$, car tout point de ce disque est centre d'un disque de rayon $|A|/4$ contenu dans Ω , sur lequel η est majoré par $a/100 \leq 1/200$. Pour $Z \in \mathcal{D}$, on a :

$$|(G(Z) - A') - (1 + U)(Z - A')| = \left| \int_{A'}^Z \eta'(t) dt \right| \leq \frac{1}{50|A|} |Z - A'|,$$

d'où l'inégalité dans ce cas aussi.

Cqfd.

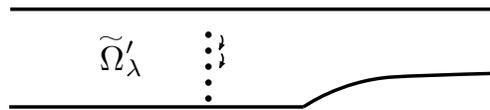
On suppose maintenant λ tel que $|\arg A_\lambda - 1/4| \leq 1/12$, ce qui entraîne $\arg(1 + U_\lambda) \leq -1/2A_\lambda$. On définit un ouvert $\Omega'_\lambda \subset \Omega$ de la façon suivante : Si V désigne le plus grand secteur angulaire ouvert de sommet A'_λ ne rencontrant pas \overline{D}_R , l'ouvert Ω'_λ est l'ensemble des $Z \in V$ tels que $[A'_\lambda, Z] \cap -i\mathbb{R}_+ = \emptyset$.



Notons E_λ le quotient de Ω'_λ par la relation d'équivalence identifiant Z à $G_\lambda(Z)$ si le segment $[Z, G_\lambda(Z)]$ est contenu dans Ω'_λ .

Proposition 2 et Définition. — L'espace E_λ est une surface de Riemann isomorphe à \mathbb{C}/\mathbb{Z} , qu'on appellera le cylindre de Fatou-Ecalle de G_λ .

Démonstration. — Par le changement de variable $Z \mapsto \log(Z - A'_\lambda)$ (on choisit une détermination sur Ω'_λ), l'ouvert Ω'_λ devient une bande $\tilde{\Omega}'_\lambda$ limitée par des courbes faisant avec l'horizontale un angle borné par $\frac{1}{12}$ tour = 30° ⁽¹⁾. L'application G_λ donne



⁽¹⁾En fait, l'une de ces deux courbes est une horizontale.

une application $\tilde{G}_\lambda : \tilde{\Omega}'_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\tilde{G}_\lambda(x + iy) = x_1 + iy_1$ avec $y_1 - y < -0,45|U|$ et $|x_1 - x| < |y_1 - y| < 1/2$. Comme la bande $\tilde{\Omega}'_\lambda$ a partout une largeur $> \pi$, $E_\lambda = \Omega'_\lambda/G_\lambda \approx \tilde{\Omega}'_\lambda/\tilde{G}_\lambda$ est isomorphe à un cylindre. Cqfd.

Remarque. — Soit Θ'_λ l'ouvert de Θ_λ correspondant à Ω'_λ par $z \mapsto Z$. Le quotient Θ'_λ/f_c^{kq} , où $c = c(\lambda)$, s'identifie à $E_\lambda = \Omega'_\lambda/G_\lambda$, nous dirons que c'est le *cylindre de Fatou-Ecalles* de f_c^{kq} dans le secteur Θ_λ . L'application f_c^{kq} a donc q cylindres de Fatou-Ecalles relatifs au point $\alpha(\lambda)$. Celui qui nous intéresse est celui du secteur contenant l'axe de P_1 et le bout de $\mathcal{R}(K_{c_0}, \theta)$.

4. Définition de $\check{\omega}(c)$

Soient $\lambda \in \tilde{S}$ et $c = c(\lambda) \in S$. Notons $E_\lambda = \Theta'_\lambda/f_c^{kq}$ le cylindre de Fatou-Ecalles de f_c^{kq} , $\chi : \Theta'_\lambda \rightarrow E_\lambda$ l'application canonique et $\xi = \chi(x_0(\lambda))$. Un chemin γ de $x_1(\lambda)$ à $x_0(\lambda)$ dans Θ'_λ donne un lacet $\chi \circ \gamma$ dans E_λ , basé en ξ . Par abus, nous dirons que c'est un *lacet injectif* s'il définit une application injective $\mathbb{T} = \mathbb{I}/_{0 \sim 1} \rightarrow E_\lambda$.

Proposition 3 et Définition

a) Il existe un chemin γ de $x_1(\lambda)$ à $x_0(\lambda)$ dans Θ'_λ donnant un lacet injectif dans E_λ .

b) Deux tels chemins (γ et γ') sont homotopes parmi les chemins évitant $\mathcal{C}(c)$, et on a $\omega(c, \gamma) = \omega(c, \gamma')$.

On note $\check{\omega}(c)$ le point $\omega(c, \gamma)$ pour γ un chemin quelconque de $x_1(\lambda)$ à $x_0(\lambda)$ donnant un lacet injectif dans E_λ .

Démonstration. — Si on a pris n_0 assez grand et Δ assez petit, on a $\mathcal{C}(c) \cap \Theta_\lambda \subset \{f^{mkq}(c)\}_{m < n_0}$, donc $\chi(z) = \xi$ pour tout $z \in \mathcal{C}(c) \cap \Theta'_\lambda$.

Passons dans la coordonnée $\log(Z - A'_\lambda)$ de sorte que Θ' devient $\tilde{\Omega}'$.

a) Le chemin affine répond à la question.

b) Les lacets $\eta = \chi(\gamma)$ et $\eta' = \chi(\gamma')$ sont homotopes parmi les lacets injectifs basés en ξ , puisque E_λ est un cylindre. L'ouvert $\tilde{\Omega}'$ se plonge dans le revêtement universel \tilde{E} de E ; notons π la projection $\tilde{E} \rightarrow E$. On obtient en relevant une homotopie de γ à γ' parmi les chemins de x_1 à x_0 dans \tilde{E} évitant $\pi^{-1}(\xi) \setminus \{x_1, x_0\}$, et en particulier l'image $\tilde{\mathcal{C}}$ de $\mathcal{C} \cap \Theta'$ par l'identification $\tilde{\Omega}' \setminus \tilde{\mathcal{C}}$ contenant les images de γ et γ' . On obtient donc une homotopie de γ à γ' dans $\tilde{\Omega}' \setminus \tilde{\mathcal{C}}$ c'est-à-dire dans $\Theta' \setminus \mathcal{C}$. Ceci établit la première assertion de b). La seconde en résulte. Cqfd.

5. Cas de c_t

Pour tout $t \in]0, t^*]$, considérons le point c_t défini au §1.

Proposition 4. — Pour $t > 0$, on a $\omega(c_t) = \check{\omega}(c_t)$.

Posons $\mathcal{C}_j(c) = \{f_c^m(c)\}_{0 \leq m < (n_0+j)kq}$. Si γ est un chemin de $x_j(c)$ à $x_{j-1}(c)$ évitant \mathcal{C}_{j-1} , il existe un chemin $\tilde{\gamma} : [0, n_0 + j] \rightarrow \mathbb{C}$ unique prolongeant γ et tel que $\tilde{\gamma}(t+1) \in f_c^{-kq}(\tilde{\gamma}(t))$ pour $t \in [0, n_0 + j - 1]$. On pose alors $\check{\omega}(c, \gamma) = \gamma(n_0 + j)$, et on a $\check{\omega}(c, \gamma) \sim_{f_c} c$.

Lemme 2. — Soit $c = c(\lambda) \in S$. Soit n tel que $x_j(c) \in \Theta'_\lambda$ pour $0 \leq j \leq n$, et soit γ un chemin de $x_n(c)$ à $x_{n-1}(c)$ dans Θ'_λ donnant un lacet injectif dans E_λ . On a :

- a) $\gamma(I) \cap \mathcal{C}_{n-1}(c) = \emptyset$;
- b) $\omega(c, \gamma) = \check{\omega}(c)$.

Démonstration

a) On a $\mathcal{C}_{n-1} \cap \Theta' = \mathcal{C} \cap \Theta' \cup \{x_0, \dots, x_{n-2}\}$, et a) en résulte.

b) Pour $j = 1, \dots, n$, notons γ'_j le chemin de x_j à x_{j-1} qui devient affine dans la coordonnée $\log(Z - A')$. Le chemin γ'_j donne un chemin injectif dans E , ainsi que $f^{kq}(\gamma'_{j-1})$ si $j \geq 2$. La même démonstration que pour la partie b) de la Proposition 3 montre que :

$$\omega(c, \gamma) = \omega(c, \gamma'_n) = \omega(c, f^{kq}(\gamma'_{n-1})) = \dots = \omega(c, \gamma'_1) = \check{\omega}(c). \quad \text{Cqfd.}$$

Soient $c = c(\lambda)$, $c \in S$ et $s \in I^*$ (cf. §1). Définissons le chemin $\gamma_{c, \mathcal{R}, s}$ par $\arg_{K_c} \gamma_{c, \mathcal{R}, s}(f) = \theta$ et $\mathcal{G}_c(\gamma_{c, \mathcal{R}, s}(t)) = 2^{-tkq}s$. Ce chemin paramètre $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ de $y(c, s)$ à un point $y_1(c, s) = y(c, s/2^{kq}) \in f^{-k}(y(c, s))$.

Si on a choisi r^* assez voisin de 1 et W , donc S et Λ assez petits, l'image de $\gamma_{c, \mathcal{R}, s}$ est contenue dans Ω'_λ pour tout $s \in I^*$ et tout $\lambda \in \Lambda$.

Lemme 3. — Si $\gamma_{c, \mathcal{R}, s}$ est un chemin dans Θ'_λ , il définit un lacet injectif dans E_λ .

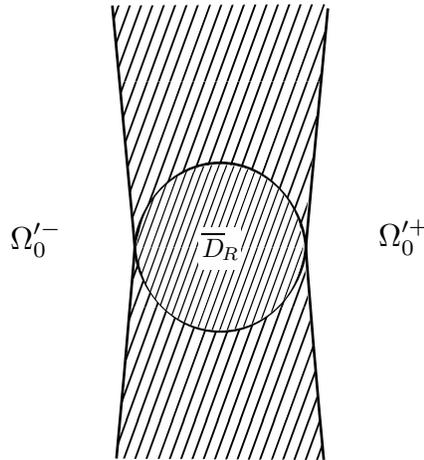
Démonstration. — Sinon on pourrait trouver un couple $(t, t') \in I^2$, autre que $(1, 0)$, et un $i \geq 1$ tel que $\gamma_{c, \mathcal{R}, s}(t') = f_c^{ikq}(\gamma_{c, \mathcal{R}, s}(t))$, d'où $\mathcal{G}(\gamma_{c, \mathcal{R}, s}(t')) = 2\mathcal{G}^{ikq}(\gamma_{c, \mathcal{R}, s}(t))$, ce qui est en contradiction avec la définition de $\gamma_{c, \mathcal{R}, s}$. Cqfd.

Démonstration de la Proposition. — Pour $c = c_t$, $t = t_{N, s}$, on a $\omega(c) = \omega(c, \gamma_{c, \mathcal{R}, s})$ en vertu des définitions. On a $\omega(c, \gamma_{c, \mathcal{R}, s}) = \check{\omega}(c)$ en vertu des lemmes 2 et 3, d'où $\omega(c) = \check{\omega}(c)$. Cqfd.

6. Définition de $\check{\omega}(c_0)$

Notons Ω'_0 le plus grand ouvert qui soit contenu dans Ω'_λ pour tout $\lambda \in \tilde{S}$. L'ouvert Ω'_0 est délimité par 4 demi-droites, et a 2 composantes connexes Ω'^+_0 et Ω'^-_0 :

Un secteur Θ ayant été choisi, à $f_{c_0}^{kq}$ correspond une application $G_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de la forme $Z \mapsto Z - 1 + \eta$, $\|\eta\| \leq a/100$. Les quotients $E_0^+ = \Omega'^+_0/G_0$ et $E_0^- = \Omega'^-_0/G_0$ sont isomorphes à des cylindres. Ce sont les deux *cylindres de Fatou-Ecalle* de G_0 . En changeant le choix du secteur Θ , on obtient ainsi $2q$ cylindres attachés au point α_1 . Celui qui nous intéresse est le cylindre E_0^- correspondant au secteur Θ contenant



l'axe du pétale P_1 au voisinage de α_1 . Nous supposons que c'est un choix qu'on a fait pour Θ . Notons $\Theta_0'^-$ l'image réciproque de $\Omega_0'^-$ dans Θ par $z \mapsto Z$. Si on a choisi n_0 assez grand, on a $x_n(c_0) \in \Theta_0'$ pour tout $n \geq 0$, et il existe un chemin γ de $x_1(c_0)$ à $x_0(c_0)$ dans $\Theta_0'^-$ donnant un lacet injectif dans E_0^- . Ceci permet de définir $\check{\omega}(c_0)$ (on voit comme dans la Proposition 3 que le résultat ne dépend pas du choix de γ). On a bien sûr $\check{\omega}(c_0) \sim_{f_{c_0, n_0 k q}} c_0$. Cqfd.

Proposition 5. — *Le point $\check{\omega}(c)$ tend vers $\check{\omega}(c_0)$ quand $c \rightarrow c_0$ dans S .*

Démonstration. — Soit γ_0 un chemin de $x_1(c_0)$ à $x_0(c_0)$ donnant un lacet injectif — par exemple le chemin affine dans la coordonnée Z . Pour λ voisin de 0, on a un chemin γ_λ voisin de γ_0 de $x_1(c(\lambda))$ à $x_0(c(\lambda))$ donnant un lacet injectif — par exemple encore le chemin affine, dans la coordonnée Z , ou dans la coordonnée $\log(Z - A')$. En relevant n_0 fois, on obtient $\check{\omega}(c)$ voisin de $\check{\omega}(c_0)$. Cqfd.

7. Identification de $\check{\omega}(c_0)$

Proposition 6. — *On a : $\check{\omega}(c_0) = c_0$.*

Démonstration. — Soit U_1 la composante connexe de $\overset{\circ}{K}_{c_0}$ contenant le pétale P_1 . On a $\Theta_0'^- \subset P_1$, ou du moins $f_{c_0}^{nkq}(\Theta_0'^-) \subset P_1$, pour n assez grand, donc $\Theta_0'^- \subset U_1$. D'autre part, pour tout $z \in U_1$, la suite $f_{c_0}^{nkq}(z) \rightarrow \alpha_1$ tangentiellement à l'axe de P_1 (IX, Propositions 3 et 2); donc $(\exists n) f_{c_0}^{nkq}(z) \in \Theta_0'$. Par suite, $E_{c_0}^- = \Theta_0' / f_{c_0}^{nkq}$ est aussi $U_1 / f_{c_0}^{nkq}$. Ceci donne une définition de $E_{c_0}^-$ indépendante de tout choix, ne dépendant en fait que de la dynamique sur U_1 .

L'application $f^{kq} : U_1 \rightarrow U_1$ est holomorphe propre de degré 2. Elle a un point critique u , l'unique point de $f_{c_0}^{-(kq-1)}(0) \cap U_1$, et pour valeur critique c_0 . Soit $\varphi : U_1 \rightarrow \mathbb{D}$

l'isomorphisme tel que $\varphi(u) = 0$ et $\varphi(c_0) \in]0, 1[$; on a :

$$\varphi \circ f^{kq} \circ \varphi^{-1} = h : z \mapsto \frac{3z^2 + 1}{z^2 + 3} \quad (\text{IX, Corollaire 1 de la Prop. 4}).$$

Notons E_h^- le cylindre de Fatou-Ecalle de h au point 1, relatif à un secteur centré sur l'axe dirigé vers \mathbb{R}_- . On a de même $E_{c_0}^- = \mathbb{D}/h$, et ϕ donne par passage au quotient un isomorphisme $\Phi : E_{c_0}^- \rightarrow E_h^-$. Posons $x_n(h) = h^{n_0+n}(1/3) = \varphi(x_n(c_0))$. On peut définir $\check{\omega}(h)$ de la façon suivante : On prend un chemin γ de $x_1(h)$ à $x_0(h)$ qui donne un lacet injectif dans $E^-(h)$, on le prolonge à $[0, n_0 + 1]$ en un lacet $\tilde{\gamma}$ tel que $\tilde{\gamma}(t+1) \in h^{-1}(\gamma(t))$ pour $t \in [0, n_0]$, et on pose $\omega(h) = \tilde{\gamma}(n_0 + 1)$. On a clairement $\check{\omega}(h) \sim_{h, n_0} 1/3$ et $\varphi(\check{\omega}(c_0)) = \check{\omega}(h)$. La proposition 6 résulte alors du lemme suivant :

Lemme. — On a : $\check{\omega}(h) = 1/3$.

Démonstration. — On a $h^n(1/3) \in]0, 1[$ pour tout $n > 0$; on peut prendre pour γ le chemin affine de $x_1(h)$ à $x_0(h)$. Alors, γ est un chemin injectif d'image contenue dans $]0, 1[$ et $\tilde{\gamma}(n_0 + 1) = 1/3$. Cqfd.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 6. Cqfd.

8. Démonstration du Théorème 1

La proposition 6 admet le corollaire suivant :

Corollaire. — Pour $c \in S$ assez voisin de c_0 , on a $\check{\omega}(c) = c$.

Démonstration. — Il y a $2^{n_0 k q}$ points distincts $v_i(c_0)$, $i = 1, \dots, 2^{n_0 k q}$ tels que $v_i(c_0) \sim_{f_{c_0, n_0 k q}} c_0$. En effet, $f_{c_0}^{n_0 k q}(c_0)$ n'est pas une valeur critique de $f_{c_0}^{n_0 k q}$, car ces valeurs critiques sont les $f_{c_0}^m(c_0)$ pour $0 \leq m \leq n_0 k q - 1$, et que c_0 n'est pas prépériodique. On peut supposer $v_1(c_0) = c_0$. Soient V_i , $i = 1, \dots, 2^{n_0 k q}$ des voisinages 2 à 2 disjoints des $v_i(c_0)$. Pour c assez voisin de c_0 , il y a dans chaque V_i un $v_i(c)$ unique tel que $v_i(c) \sim_{f_c, n_0 k q} c$, et $v_1(c) = c$. Pour c assez voisin de c_0 , on a $\check{\omega}(c) \in V_1$ (Proposition 5); donc $\check{\omega}(c) = v_1(c) = c$. Cqfd.

Le Théorème 1 résulte de ce corollaire et de la Proposition 4.

EXPOSÉ XIII

ABOUTISSEMENT DES RAYONS EXTERNES DE M D'ARGUMENT RATIONNEL

1. Résultats

Théorème 1. — Soit $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Alors, le rayon externe $\mathcal{R}(M, \theta)$ aboutit en un point $c \in M$ qui est soit une racine de composante hyperbolique, soit un point de Misurewicz.

Commentaire. — Les racines des composantes hyperboliques de $\overset{\circ}{M}$ sont les c tels que $f_c : z \mapsto z^2 + c$ admette un cycle indifférent rationnel. Les points de Misurewicz sont les c tels que 0 soit strictement prépériodique pour f_c ;

Compléments

1) Si θ est à dénominateur impair, c est une racine d'une composante hyperbolique. Le point c appartient à une composante U_1 de $\overset{\circ}{K}_c$ qui est attirée par un point α_1 . Il y a 2 rayons externes de K_c aboutissant en α_1 dans un interpétale adjacent à U_1 (sauf si $\theta = 0$, d'où $c = 1/4$, 1 seul rayon), et θ est l'argument de l'un d'eux.

2) Si θ est à dénominateur pair, c est un point de Misurewicz, et θ est l'un des arguments externes de c dans K_c .

Dans cet exposé, nous démontrerons le théorème 1. (Le complément 1 sera démontré à l'exposé suivant). Nous montrerons que, si c est un point de Misurewicz, alors θ est un argument externe c dans K_c , ce qui est une partie du complément 2. Le complément 2 sera démontré dans l'exposé « Une propriété de continuité ». Le théorème 1 avec ses compléments est une réciproque au théorème A de XI et au théorème 2 de VIII.

2. Points d'accumulation de $\mathcal{R}(M, \theta)$

Lemme 1. — Soit $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et soit c_0 un point d'accumulation de $\mathcal{R}(M, \theta)$. Alors, ou bien f_{c_0} a un cycle indifférent rationnel, ou bien c_0 est un point de Misurewicz.

Démonstration. — Mettons θ sous la forme $p/2^\ell(2^k - 1)$, avec ℓ et k minimaux, et posons $\theta' = 2^\ell\theta$. D'après VIII, II, proposition 2, le rayon $\mathcal{R}(K_{c_0}, \theta)$ aboutit en un point α_0 prépériodique, $\mathcal{R}(K_{c_0}, \theta')$ aboutit en $\alpha'_0 = f_{c_0}^\ell(\alpha_0)$, qui est périodique de période k' divisant k , répulsif ou indifférent rationnel. Si α'_0 est périodique indifférent rationnel, on a gagné. Dans la suite, nous le supposons répulsif. On peut donc appliquer la proposition 3 de VIII, II. En vertu de cette proposition, on peut trouver un voisinage W de c_0 dans M , une application analytique $c \rightarrow \alpha'(c)$ de W dans \mathbb{C} telle que $f_c(\alpha'(c)) = \alpha'(c)$ et $\alpha'(c_0) = \alpha'_0$, et une application continue $(c, s) \rightarrow \psi_{c, \theta'}(s)$ de $W \times \mathbb{R}_+$ dans \mathbb{C} telle que $\psi_{c, \theta'}(0) = \alpha'(c)$ et $\psi_{c, \theta'}(s) = \varphi_c^{-1}(e^{s+2i\pi\theta'})$.

Soit c_n une suite de points de $\mathcal{R}(M, \theta)$ tendant vers c_0 , et posons $s_n = \mathcal{G}_M(c_n)$ (potentiel). On a $s_n \rightarrow 0$, et $\psi_{c_n, \theta'}(2^\ell s_n) = f_{c_n}^\ell(c_n)$, d'où $f_{c_0}^\ell(c_0) = \psi_{c_0, \theta'}(0) = \alpha'_0$. Comme α'_0 est périodique et appartient à ∂K_{c_0} , le point c_0 est un point de Misurewicz. Cqfd.

Complément 1. — Si c_0 est un point de Misurewicz, θ est un argument externe de c_0 dans K_{c_0} .

Démonstration. — Gardons les notations de la démonstration précédente. Montrons d'abord que $f_{c_0}^i(\alpha_0) \neq 0$ pour tout $i \geq 0$ (cf. VIII, II, prop. 3). Si on avait $f_{c_0}^i(\alpha_0) = 0$, on aurait $\psi_{c_0, 2^{i+1}\theta}(0) = f_{c_0}^{i+1}(\alpha_0) = c_0$. Or $\psi_{c_0, 2^{i+1}\theta}(2^{i+1}s_n) = f_{c_n}^{i+1}(c_n)$ tend vers $f_{c_0}^{i+1}(c_0)$. Mais c_0 n'a pas de point critique de f_{c_0} dans son orbite directe, donc on peut appliquer VIII, II, proposition 3, qui donne $\psi_{c_0, 2^{i+1}\theta}(2^{i+1}s_n) \rightarrow c_0$, d'où $f_{c_0}^{i+1}(c_0) = c_0$. Comme 0 est le seul point dans $f_{c_0}^{-1}(c_0)$, on en déduit que $f_{c_0}^{i+1}(0) = 0$, ce qui est en contradiction avec le fait que c_0 est un point de Misurewicz.

On peut maintenant appliquer VIII, II, proposition 3, à $\alpha_0 = \psi_{c_0, \theta}(0)$. On a $\psi_{c_n, \theta}(s_n) = c_n$, d'où en passant à la limite $\psi_{c_0, \theta}(0) = c_0$ et $c_0 = \alpha_0$. Cqfd.

Complément 2. — Si c_0 n'est pas un point de Misurewicz, $f_{c_0}^\ell(\alpha_0)$ est un point périodique indifférent rationnel.

3. Démonstration du Théorème 1

L'ensemble des points d'accumulation de $\mathcal{R}(M, \theta)$ est un compact connexe. D'après le lemme 1, il est contenu dans la réunion de l'ensemble des points de Misurewicz, qui est dénombrable, et de l'ensemble des c tels que f_c admette un cycle indifférent rationnel, qui l'est aussi.

Mais, tout compact connexe dénombrable est réduit à un point. Il y a donc un seul point d'accumulation c , et comme tout se passe dans un compact, $\mathcal{R}(M, \theta)$ aboutit en c . Cqfd.

Nous avons démontré le théorème 1 et la partie annoncée de son complément 2.

EXPOSÉ XIV

COMPOSANTES HYPERBOLIQUES

1. Composantes hyperboliques

Notons X_k l'ensemble des couples (c, z) tels que $f_c^k(z) = z$, π la projection $(c, z) \mapsto c$ de X_k sur \mathbb{C} , et ρ_k ou simplement ρ la fonction $(c, z) \mapsto (f_c^k)'(z)$ sur X_k . L'ensemble X_k est une courbe algébrique sur \mathbb{C} et $\pi : X_k \rightarrow \mathbb{C}$ est propre de degré 2^k . En vertu du théorème des fonctions implicites, en tout point de X_k où $\rho_k \neq 1$, la courbe X_k est lisse et π est un isomorphisme local.

Notons A_k l'ensemble des $(c, z) \in X_k$ tels que $|\rho(c, z)| < 1$. Comme $\rho : X_k \rightarrow \mathbb{C}$ est analytique, elle est ouverte (même si X_k a des points singuliers). Par suite $\bar{A}_k = \rho_k^{-1}(\bar{\mathbb{D}})$, $\partial A_k = \rho_k^{-1}(S^1)$ et l'ensemble des (c, z) tels que z soit un point périodique indifférent rationnel de f_c est dense dans ∂A_k . L'ensemble ∂A_k est un ensemble \mathbb{R} -algébrique, de dimension 1 sur \mathbb{R} , et ses seules singularités, en dehors des points singuliers de X_k , sont de la forme (intersection de ν branches lisses), aux points



singuliers de ρ_k .

Posons $M'_k = \pi(A_k)$. C'est un ouvert de \mathbb{C} , et l'ensemble des $c \in \partial M'_k$ tels que f_c ait un cycle indifférent rationnel de période divisant k est dense dans $\partial M'_k$. Or ces points appartiennent à ∂M (on sait même qu'ils sont le point d'aboutissement d'un rayon externe de M). Par suite $\partial M'_k \subset \partial M$, et toute composante connexe de M'_k est une composante connexe de $\overset{\circ}{M}$.

L'ensemble $M' = \bigcup_k M'_k$ est l'ensemble des c tels que f_c ait un cycle attractif. Chaque composante connexe de M' est une composante connexe de $\overset{\circ}{M}$. Les composantes connexes de $\overset{\circ}{M}$ ainsi obtenues sont les composantes hyperboliques. La question

de savoir s'il y a des composantes non-hyperboliques (composantes farfelues) est ouverte. Pour $c \in M'$, il y a un seul cycle attractif, et la période de ce cycle reste constante sur chaque composante connexe de M' .

Si W est une composante connexe de M' , W est simplement connexe, puisque c'est une composante connexe de $\overset{\circ}{M}$, ∂W est une réunion d'arcs de courbes algébriques, donc est localement connexe, donc \overline{W} est homéomorphe à $\overline{\mathbb{D}}$. Soit k la période de W , et soit W' une composante connexe de A_k au-dessus de W , on définit $\rho_W : W \rightarrow \mathbb{D}$ par $\rho_W(c) = \rho_k(c, z)$ pour $(c, z) \in W'$ (indépendant du choix de W'). L'application π induit un homéomorphisme de \overline{W}' sur \overline{W} , donc ρ_W se prolonge en une application continue (encore notée ρ_W) de \overline{W} dans $\overline{\mathbb{D}}$ avec $\rho_W(\partial W) \subset S^1$. L'application holomorphe $\rho_W : W \rightarrow \mathbb{D}$ est propre. Tout point $c \in W$ (resp. $c \in \partial W$) tel que $\rho_W(c) = 0$ (resp. $\rho_W(c) = 1$) est appelé un *centre* (resp. une *racine*) de W . Nous verrons que $\rho_W : \overline{W} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ est un homéomorphisme. Il en résultera que W a 1 centre et 1 racine.

2. Déformation d'un cycle indifférent rationnel, cas $q \neq 1$

Soit $c_0 \in M$ tel que f_{c_0} admette un point périodique $\alpha(c_0)$ de période k , de valeur propre $\rho_0 = e^{2i\pi p/q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$, $q \neq 1$, et donc $\rho_0 \neq 1$. Posons $K = kq$. La courbe algébrique X_k est au voisinage de $(c_0, \alpha(c_0))$ le graphe d'une application holomorphe $c \mapsto \alpha(c)$. La fonction holomorphe $c \mapsto \rho_k(c, \alpha(c))$ a en c_0 une dérivée $\neq 0$: cela résulte de XII, Corollaire 2 du Théorème 1.

Proposition 1. — *Au voisinage de c_0 , l'ouvert M'_k est limité par un arc de courbe \mathbb{R} -analytique.*

Démonstration. — f_{c_0} n'admet pas d'autre cycle indifférent que celui de $\alpha(c_0)$. On a en effet construit en X un fermé B attiré par ce cycle et r sur $\mathbb{C} \setminus B$, une métrique pour laquelle f_{c_0} est strictement expansif. Par suite, X_k induit un revêtement trivial de degré 2^k d'un voisinage W de c_0 . Parmi les 2^k feuillets, k contiennent un point du cycle de $\alpha(c_0)$, et $F : (c, z) \mapsto (c, f_c(z))$ échange ces feuillets ; sur les autres on a $|\rho| > 1$ si on a choisi W assez petit. On a donc $M'_k \cap W = \pi(A_k \cap W')$ où W' est le feuillet contenant $\alpha(c_0)$. Cqfd.

Proposition 2. — *Au voisinage de $(c_0, \alpha(c_0))$, on a $X_K = X_k \cup X'_K$, où*

- a) $X_k \cap X'_K = \{c_0\}$,
- b) X'_K est lisse en $(c_0, \alpha(c_0))$ à tangente verticale,
- c) $\pi_K : X'_K \rightarrow \mathbb{C}$ a pour degré local q en ce point.
- d) $\rho_K : X'_K \rightarrow \mathbb{C}$ a aussi pour degré local q en $(c_0, \alpha(c_0))$.
- e) Au voisinage de c_0 , $M'_K = M'_k \cup M''_K$, où M''_K est l'ensemble des c tels que f_c a un cycle attractif de période exactement K . Ces deux ouverts sont limités chacun par un arc de courbe \mathbb{R} -analytique.
- f) Ces deux arcs se rencontrent en c_0 seul.

Démonstration. — Soit ζ une coordonnée satisfaisant aux conditions de XI, Prop. 1 : l'expression g_c de f_c^k dans cette coordonnée est de la forme

$$g_c : \zeta \longmapsto \rho(c, \alpha(c))\zeta + \beta(c)\zeta^{q+1} + \dots,$$

et f_c^{kq} devient $g_c^q : \zeta \mapsto (1 + u(c))\zeta - b(c)\zeta^{q+1} + \dots$ avec $u(c_0) = 0$ et $b(c_0) \neq 0$. L'équation de X_K est

$$g_c^q(\zeta) - \zeta = \zeta(u(c) - b(c)\zeta^q + \dots) = 0.$$

Cet ensemble est réunion de X_k d'équation $\zeta = 0$ et de X'_K d'équation $u(c) = b(c)\zeta^q + \dots$. Comme $c \mapsto u(c)$ a un zéro simple en c_0 (XII Cor. 2 du Th. 1), X'_K est lisse.

Comme $b(c_0) \neq 0$, on a la partie c). Pour $(c, z) \in X'_K$, on a $\rho_k(c, z) = (g_c^q)'(\zeta) = 1 + u(c) - (q+1)b(c)\zeta^q + \dots$, d'où la partie d). La fonction ρ_K prend la même valeur aux q points de X'_K au-dessus d'un point c voisin de c_0 . Par suite, $\rho_K : X'_K \rightarrow \mathbb{C}$ se factorise en $\rho'' \circ \pi$ où ρ'' est holomorphe sur un voisinage W de c_0 . Pour $c \in W$, on a $c \in M'_K \iff |\rho_k(c, \alpha(c))| < 1$ ou $|\rho''(c)| < 1$, $2^K - (q+1)k$ autres feuillettes donnant de toute façon des points périodiques répulsifs, du moins si on a pris W assez petit. Puisque π et ρ ont même degré local, ρ'' a une dérivée non nulle en c_0 . Ceci donne e). La partie f) vient du Cor. 3 du Th. 1 de XII, qui donne 2 rayons externes de M aboutissant en c_0 , l'un dans le secteur des $\text{Im } u > 0$, l'autre dans celui des $\text{Im } u < 0$. Cqfd.

Remarque

- 1) On verra dans l'exposé XV qu'on a la situation suivante :
- 2) On peut également déduire e) de IX III Prop. 6.

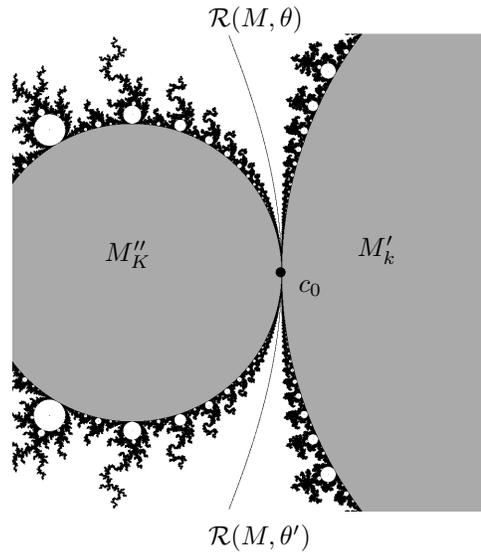
3. Cas $q = 1$

Soit $c_0 \in M$ tel que f_{c_0} admette un point périodique α_0 de période k , de valeur propre $\rho_0 = 1$. Alors α_0 est un point fixe double de $f_{c_0}^k$ IX, III, Prop. 6.

Proposition 3

- a) X_k est lisse en (c_0, α_0) , à tangente verticale.
- b) $\pi : X_k \rightarrow \mathbb{C}$ est de degré 2 en ce point.
- c) $\rho_k : X_k \rightarrow \mathbb{C}$ a une dérivée $\neq 0$ en ce point.
- d) Au voisinage de c_0 , l'ouvert M'_k est limité par un arc \mathbb{R} -analytique ayant en c_0 un point de rebroussement.

Démonstration. — La partie a) résulte du Cor. 2 du Th. 1 de XII. La partie b) du fait que la multiplicité de α_0 comme point fixe de $f_{c_0}^k$ est 2. La partie c) vient avec a). Dans X_k , l'ouvert A_k est limité au voisinage de (c_0, α_0) par une courbe \mathbb{R} -analytique

FIGURE 1. Les ensembles M'_k et M''_K .

lisse. Comme $c_0 \in \partial M'_k$ puisque c'est l'aboutissement d'un rayon externe de M , et comme $\pi : A_k \rightarrow M'_k$ est injective au voisinage de (c_0, α_0) , on en déduit d). Cqfd.

4. Arbre de Hubbard en une racine

Soit $c_0 \in M$ tel que f_{c_0} admette un point périodique $\alpha(c_0)$ de période k , de valeur propre $\rho_0 = e^{2i\pi p/q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$; on notera $K = kq$.

On va définir comme on l'avait fait dans l'exposé IV (première partie de ce cours) un arbre associé à c_0 .

Choisissons tout d'abord un système de centres pour les composantes de $\overset{\circ}{K}_{c_0}$; si U_0, \dots, U_{K-1} est le cycle périodique de composantes de $\overset{\circ}{K}_{c_0}$, indexées par $\{0, 1, \dots, K-1\}$, avec $0 \in U_0$, on prendra $f_{c_0}^i(0)$ pour centre de U_i ($0 \leq i < K$); pour les autres composantes V , on prend un système de centres de sorte que le centre de $f_{c_0}(V)$ soit l'image par f_{c_0} du centre de V . On posera $U_K = U_0$.

Définition. — Avec ces conventions, l'arbre de Hubbard H_{c_0} est l'enveloppe réglementaire des $f_{c_0}^i(0)$ ($0 \leq i < K$).

Remarque. — Si on ignore le théorème de non-errance de Sullivan, le système de centres choisi ci-dessus n'est *a priori* pas unique. Cependant la structure combinatoire (classe d'isotopie d'un arbre dans \mathbb{C}) est définie sans ambiguïté.

Proposition 4. — Si $K \neq 1$, H_{c_0} contient le cycle indifférent rationnel, et est stable par f_{c_0} .

Démonstration. — L'image par f_{c_0} de l'arc réglementaire Γ de $f_{c_0}^i(0)$ à $f_{c_0}^j(0)$ (avec $0 \leq i < K$ et $0 \leq j < K$) est, lorsque $0 \notin \Gamma$, l'arc réglementaire de $f_{c_0}^{i+1}(0)$ à $f_{c_0}^{j+1}(0)$ et, lorsque $0 \in \Gamma$, la réunion de l'arc réglementaire de $f_{c_0}^{i+1}(0)$ à c_0 et de l'arc réglementaire de $f_{c_0}^{j+1}(0)$ à c_0 . Si Γ' est l'arc réglementaire de 0 à $f_{c_0}^K(0)$ et $G = H \cup \Gamma'$, on a donc $f_{c_0}(H) \subset G$. On peut alors réappliquer le raisonnement de la proposition 4 de IV pour voir que (si $K \neq 1$) $\nu(1) \leq \dots \leq \nu(K-1)$ ($\nu(i)$ est le nombre de brins de H en $f_{c_0}^i(0)$, $0 \leq i < K$) (on n'obtient par contre pas pour l'instant $\nu(K-1) \leq \nu(K)$); un arbre à plus d'un sommet ayant au moins deux sommets pendants, $\nu(1) = 1$, donc $H \cap \partial U_1$ est un singleton $\{\alpha_1\}$. G ne rencontre aucun des ∂U_i ($0 \leq i < K$) donc $f_{c_0}(H) \subset G$ implique $f_{c_0}(H \cap \partial U_i) \subset H \cap \partial U_{i+1}$ ($0 \leq i < K$), et donc $f_{c_0}^K(\alpha_1) = \alpha_1$. α_1 est donc un point du cycle indifférent rationnel de f_{c_0} , qui est inclus dans H . En particulier l'arc de 0 à α_0 , point du cycle indifférent rationnel situé sur ∂U_0 , est dans H . Mais on sait (cf. IX, II, corollaire de la proposition 4) que la dynamique de $f_{c_0}^K$ sur U_0 est analytiquement conjuguée à celle de $z \mapsto \frac{3z^2+1}{z^2+z}$ sur \mathbb{D} , donc $f_{c_0}^K(0)$ est sur l'arc de 0 à α_0 , d'où $\Gamma' \subset H$ et $f_{c_0}(H) \subset H$. Cqfd.

On pourra dès lors appliquer les résultats des exposés IV et VII à c_0 .

5. Racines des composantes hyperboliques; multiplicité

Soit $c_0 \in M$ tel que f_{c_0} ait un cycle indifférent d'ordre k , de valeur propre $e^{2i\pi p/q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$, et posons $K = kq$.

Proposition 5

- a) Il existe une unique composante hyperbolique W de $\overset{\circ}{M}$ tel que c_0 soit une racine de W . C'est une composante de période K .
- b) Si $c_0 \neq 1/4$, le point c_0 a au moins 2 arguments externes dans M , de la forme $p/(2^K - 1)$.

Démonstration. — La partie a) résulte des propositions 2 et 3.

b) cas $q \neq 1$: soient U_1 la composante connexe de $\overset{\circ}{K}_{c_0}$ contenant c_0 , α_1 le point du cycle indifférent de f_{c_0} attirant U_1 . Il y a q pétales, donc q interpétales en α_1 , et 2 de ces interpétales sont adjacents à U_1 . Dans chacun d'eux arrive au moins un rayon externe de K_{c_0} d'argument de la forme $p/(2^K - 1)$ et les rayons externes de M de même argument aboutissent en c_0 (XII Cor. 2 du Th. 1).

b) cas $q = 1$: il n'y a qu'un pétale en α_1 , donc 1 seul interpétale. Cependant il y a au moins 2 rayons externes de K_{c_0} aboutissant en α_1 : en effet α_1 est sur H_{c_0} sans en être un sommet pendant, donc il y a au moins deux accès à α_1 sur H_{c_0} et donc, par le corollaire 1 de l'exposé VII, deux rayons externes de K_{c_0} aboutissent en α_1 .

Ces rayons externes ont des arguments de la forme $p/(2^k - 1)$ (IX II Prop. 5). Les rayons externes de M de même argument aboutissent en c_0 . Cqfd.

Soit W une composante hyperbolique de $\overset{\circ}{M}$, de période k . Pour $c \in W$, notons $\alpha(c)$ le point périodique attractif de f_c attirant 0.

Proposition 6. — *Les nombres suivants sont égaux :*

- a) le degré μ de l'application holomorphe propre $\rho_W : W \rightarrow \mathbb{D}$.
- b) Le nombre de zéros dans W de $c \mapsto \alpha(c)$, comptés avec multiplicité.
- c) Le nombre de zéros dans W de $c \mapsto f_c^k(0)$, comptés avec multiplicité.
- d) le nombre de racines de W dans \overline{W} .

Lemme. — *Soit $c_0 \in W$ tel que $f_{c_0}^k(0) = 0$. Les fonctions $c \mapsto f_c^k(0)$, $c \mapsto \alpha(c)$ et $c \mapsto \rho_W(c) = \rho_k(c, \alpha(c))$ ont même ordre d'annulation en c_0 .*

Démonstration. — Pour $c \in W$, on a $\rho_W(c) = 2^k \alpha(c) \cdot f_c(\alpha(c)) \cdots f_c^{k-1}(\alpha(c))$, et dans le cycle $\{\alpha(c), f_c(\alpha(c)), \dots, f_c^{k-1}(\alpha(c))\}$, seul $\alpha(c)$ appartient à la composante connexe de $\overset{\circ}{K}_c$ contenant 0. Les fonctions $c \mapsto \alpha(c)$ et $c \mapsto \rho_W(c)$ ont donc même ordre d'annulation. D'autre part, pour c voisin de c_0 , on a

$$|f_c^k(0) - \alpha(c)| < \frac{1}{2}|0 - \alpha(c)| = \frac{1}{2}|\alpha(c)|,$$

donc $c \mapsto f_c^k(0)$ et $c \mapsto \alpha(c)$ s'annulent en c_0 avec même multiplicité. Cqfd.

Démonstration de la proposition. — Les zéros des fonctions $c \mapsto \rho_W(c)$, $c \mapsto \alpha(c)$ et $c \mapsto f_c^k(0)$ sont les mêmes, et d'après le lemme ils ont même multiplicité. Le nombre de zéros de $c \mapsto \rho_W(c)$, compté avec multiplicités, est le degré μ de ρ_W . Le bord ∂W est homéomorphe à S^1 et $\rho_W : \partial W \rightarrow S^1$ est de degré μ . Comme elle est croissante puisque ρ_W est holomorphe sur W , le nombre de points dans $\rho_W^{-1}(1)$ est aussi μ . Cqfd.

Nous appellerons μ la multiplicité de W . Nous prouverons dans l'exposé « simplicité » que $\mu = 1$.

6. Décompte

Nous allons démontrer le complément 1 au théorème 1 de XIII.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons

$m_1(k)$ le nombre de valeurs c telles que $f_c^k(0) = 0$, compté avec multiplicité.

$m_2(k)$ le nombre de composantes hyperboliques de $\overset{\circ}{M}$ de période divisant k , compté avec multiplicité.

$m_3(k)$ le nombre de racines des composantes hyperboliques de période divisant k .

$m_4(k)$ le nombre de $t \in \mathbb{T}$ tels que $2^k t = t$, i.e. de la forme $p/(2^k - 1)$.

On a $m_1(k) = m_2(k) = m_3(k)$ d'après la Prop. 5 et $m_3(k) \geq 2m_4(k) - 1$ d'après la Prop. 4. Mais $f_c(0) = c$, $f_c^2(0) = c^2 + c$, $f_c^3(0) = (c^2 + c)^2 + c$, etc. $f_c^k(0) = P_k(c)$ où P_k est un polynôme de degré 2^{k-1} (on le voit par récurrence car $P_{k+1}(c) = (P_k(c))^2 + c$), donc $m_1(k) = 2^{k-1}$. D'autre part $m_4(k) = 2^k - 1$. Donc on a l'égalité $m_3(k) = 2m_4(k) - 1$. Il en résulte d'une part que chaque c_0 racine d'une composante hyperbolique (sauf $1/4$) a exactement 2 arguments externes rationnels à dénominateur impair dans M , d'autre part qu'on obtient ainsi tous les éléments de $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ rationnels à dénominateur impair. Ceci démontre le complément 1 du théorème 1.

EXPOSÉ XV

ORDRE DU CONTACT DES COMPOSANTES HYPERBOLIQUES DE M

TAN LEI

Soit c_0 l'intersection des deux composantes hyperboliques W, W' de M dont l'une est de période k , l'autre est de période kq ; alors f_{c_0} admet un cycle indifférent rationnel avec valeur propre $e^{2i\pi p/q}$, de période k .

Proposition. — *Le contact de W et W' au point c_0 est d'ordre 2.*

1. Résumé des résultats déjà obtenus qui sont utiles pour la démonstration de cette proposition

Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ le cycle indifférent rationnel de f_{c_0} dont α_1 est le point attirant c_0 . Soit P_1 le pétale de α_1 qui contient c_0 et $\mathcal{R}(K_{c_0}, \theta)$ un rayon externe qui aboutit en α_1 dans un interpétale adjacent à P_1 . D'après le théorème A de l'exposé XI le rayon externe $\mathcal{R}(M, \theta)$ aboutit en c_0 . Comme $q \neq 1$, pour tout c dans un voisinage de c_0 , on

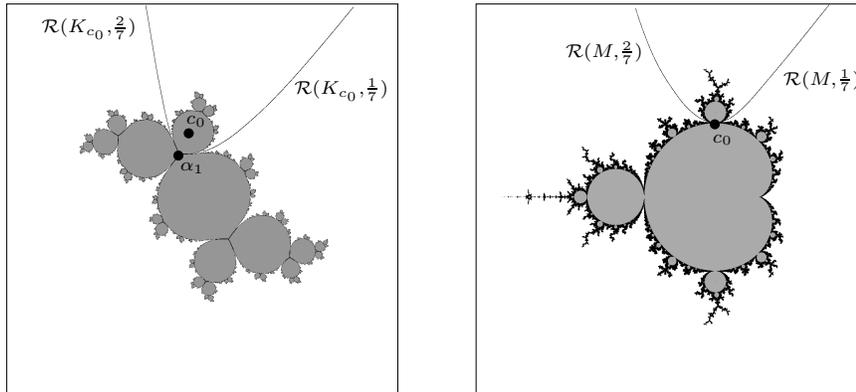


FIGURE 1. Les rayons externes aboutissant en α_1 et en c_0 .

peut trouver un $\alpha(c)$ tel que $f_c^k(\alpha(c)) = \alpha(c)$ avec $c \mapsto \alpha(c)$ analytique et $\alpha(c_0) = \alpha_1$.

Posons :

$$c(\lambda) = c_0 + \lambda; \quad \begin{cases} \rho(\lambda) = (f_{c(\lambda)}^k)(\alpha(c(\lambda))) \\ \rho(0) = e^{2i\pi p/q} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tau(\lambda) = \frac{1}{\rho(\lambda)^{q^2}} - 1 \\ \tau(0) = 0; \end{cases}$$

alors, $\tau(\lambda)$ a en 0 un zéro simple (de multiplicité 1) XII, donc $\lambda \mapsto \tau(\lambda)$ est un homéomorphisme dans un voisinage de 0.

Pour Δ disque centré en $\alpha(c_0)$ fixé assez petit, on prend n_0 assez grand et $r^* > 1$ assez voisin de 1 tels que $x(c_0) = f_{c_0}^{n_0 k q}(c_0)$ et $y(c_0) = \varphi_{c_0}^{-1}(r^* e^{2i\pi\theta})$ appartiennent à Δ . Pour c voisin de c_0 , posons $x(c) = f_c^{n_0 k q}(c)$ et $y(c) = \varphi_c^{-1}(r^* e^{2i\pi\theta})$. Fixons $a \in]0, 1/2]$ et notons $P_a = \{z \mid |\operatorname{Re} z| \leq a, |\operatorname{Im} z| \leq a\}$. Si on prend

$$\Sigma_N = \{U \mid N \log(1 + U) + 2\pi i \in P_a\},$$

on a $\Sigma_N \subset D_{8/N} \setminus \overline{D}_{4/N}$ quand $N \geq 8$.

2. Démonstration de la proposition

Pas 1. — Pour tout voisinage W_{c_0} de c_0 , d'après l'exposé XI, il existe un $N_0 \geq 0$, tel que pour tout $N \geq N_0$, il existe un $c_N \in W$ tel que $f_{c_N}^{N k q}(\alpha(c_N)) = y(c_N)$ c'est-à-dire $\forall W$ voisinage de 0, $\exists N_0 \geq 0$, $\forall N \geq N_0$, il existe $\lambda_N \in W$ tel que $f_{c(\lambda_N)}^{N k q}(x(c(\lambda_N))) = y(c(\lambda_N))$ et λ_N est dans la pièce σ_N de W où $\tau : \sigma_N \rightarrow \Sigma_N$ induit un homéomorphisme (on peut prendre W assez petit pour que $\tau(\lambda)$ soit un homéomorphisme sur W).

Au voisinage de 0, on peut écrire : $\tau(\lambda) = a\lambda + o(\lambda^2)$ avec $|a| \neq 0$, puisque $\tau(\lambda)$ a en 0 un zéro simple. Il existe donc un voisinage W de 0 tel que :

$$|\tau(\lambda) - a\lambda| = |o(\lambda^2)| < \varepsilon|\lambda|, \quad \lambda \in W, \text{ avec } 0 < \varepsilon < |a|.$$

Pour ce W , il existe $N_1 \geq 0$, tel que $\forall N \geq N_1$, $\sigma_N = \tau^{-1}(\Sigma_N) \subset W$.

$\forall \lambda \in \sigma_N \subset W$, on a :

$$(|a| - \varepsilon)|\lambda| = |a||\lambda| \leq |\tau(\lambda)| \leq |a||\lambda| + \varepsilon|\lambda| = (|a| + \varepsilon)|\lambda|.$$

Comme $4/N \leq |\tau(\lambda)| \leq 8/N$, on a :

$$\frac{4}{(|a| + \varepsilon)N} \leq |\lambda| \leq \frac{8}{(|a| + \varepsilon)N}, \quad \forall \lambda \in \sigma_N.$$

Pas 2. — Soit U un ouvert simplement connexe dans \mathbb{C} . $\forall x, y \in U$, $a \in U$, on a l'inégalité : $|y - x| \leq |x - a|(e^{4d_U(x,y)} - 1)$ où $d_U(x, y)$ désigne la distance de Poincaré sur U . Si $\varphi : U \rightarrow V$ est un isomorphisme entre deux ouverts simplement connexes, alors : $d_U(x, y) = d_V(\varphi(x), \varphi(y))$.

Si $\varphi : U \rightarrow V$ est une fonction analytique, alors $\varphi(z)$ est lipschitzienne de rapport 1, i.e. $d_V(\varphi(x), \varphi(y)) \leq d_U(x, y)$ pour tous $x, y \in U$.

L'ouvert $\mathbb{C} \setminus M$ n'est pas simplement connexe, mais si on enlève le rayon externe $\mathcal{R}(M, \theta')$, où

$$\theta' = \begin{cases} \theta + 1/2, & \theta < 1/2 \\ \theta - 1/2, & \theta > 1/2, \end{cases}$$

$\mathbb{C} \setminus M \setminus \mathcal{R}(M, \theta') = U$ est ouvert et simplement connexe. Comme $\mathcal{R}(M, \theta')$ aboutit et ne rencontre pas $\mathcal{R}(M, \theta)$, U contient $\mathcal{R}(M, \theta)$. Si on prend $V = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D} \setminus \mathcal{R}(\mathbb{D}, \theta')$, alors $\varphi_M : U \rightarrow V$ est un isomorphisme.

Pour $N_2 = \max\{N_1, N_0\}$ et $U_2 = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, 2\pi\theta - \pi < \operatorname{Im} z < 2\pi\theta + \pi\}$. $\forall N \geq N_2$, en posant $c_N = c(\lambda_N)$, on a :

$$\begin{aligned} d_U(c_N, c_{N+1}) &= d_V(\varphi_M(c_N), \varphi_M(c_{N+1})) \\ &= d_{U_2}(\log \varphi_M(c_N), \log \varphi_M(c_{N+1})) \\ &= d_{U_2}(z_N, z_{N+1}). \end{aligned}$$

On peut écrire $r^* = e^{s_0}$ avec $s_0 > 0$. On a :

$$f_{c_N}^{Nkq}(x(c_N)) = \varphi_{c_N}^{-1}(e^{s_0+2i\pi\theta});$$

donc :

$$\varphi_{c_N}(f_{c_N}^{(N+n_0)kq}(c_N)) = e^{s_0+2i\pi\theta};$$

donc :

$$[\varphi_{c_N}(c_N)]^{2^{(N+n_0)kq}} = e^{s_0+2i\pi\theta},$$

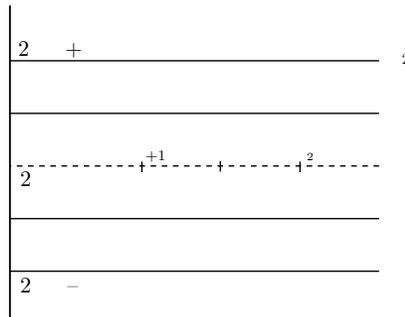
et

$$\varphi_M(c_N) = \varphi_{c_N}(c_N) = e^{\frac{s_0}{2^{(N+n_0)kq}} + 2i\pi\theta'} \quad \text{avec } 2^{(N+n_0)kq}\theta' = \theta.$$

Dans K_{c_0} , $\alpha(c_0) = \alpha_1$ a q pétales et est fixé par $f_{c_0}^k$, donc $2^{kq}\theta$, et on a vu dans XII que, en fait, $\theta' = \theta$. Par suite,

$$\varphi_M(c_N) = e^{s_N+2i\pi\theta} \quad \text{où } s_N = \frac{s_0}{(N+n_0)kq},$$

donc c_n est dans le rayon externe $\mathcal{R}(M, \theta)$ et $c_N \rightarrow c_0$ quand $N \rightarrow +\infty$. On en déduit : $d_U(c_N, c_{N+1}) = d_{U_2}(s_N + 2i\pi\theta, s_{N+1} + 2i\pi\theta)$.



Pour chaque $N \geq N_2$, on prend $\varphi_N(z) = 2i\pi\theta + \frac{1}{2^{(N-N_2)kq}}(z - 2i\pi\theta)$, c'est un isomorphisme qui envoie Z_{N_2} à Z_N et qui envoie U_2 à U_N avec U_N de la forme :

$$U_N = \{z \mid \operatorname{Re} z > 0, \mid \operatorname{Im} z - 2\pi\theta \mid < \varepsilon(N)\},$$

$$\varepsilon(N) = \frac{\pi}{2^{(N-N_2)}}, \quad \varepsilon(N) < \varepsilon(N-1) < \dots < \varepsilon(N_2)\pi.$$

L'injection $U_N \hookrightarrow U_{N+1}$ est une fonction analytique et donc est lipschitzienne de rapport 1 ; on a :

$$d_{U_2}(z_N, z_{N+1}) \leq d_{U_N}(z_N, z_{N+1}) = d_{U_2}(z_{N_2}, z_{N_2+1}) = \text{constante } A.$$

Enfin,

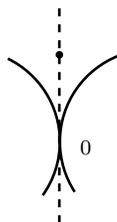
$$d_U(c_N, c_{N+1}) = d_{\mathbb{C} \setminus M \setminus \mathcal{R}(M, \theta')}(c_N, c_{N+1}) = d_{U_2}(z_N, Z_{N+1}) \leq A.$$

Pour $b_N \in \partial W \cup \partial W'$,

$$\mid c_N - c_{N+1} \mid \leq \mid c_N - b_N \mid (e^{4d_U(c_N, c_{N+1})} + 1) \leq b_1 \mid c_N - b_N \mid$$

B_1 est une constante.

Pas 3. — Supposons que le contact de W et W' au point c_0 est de degré supérieur ou égal à 4, alors pour N_3 assez grand et $N \geq N_3$, il existe $b_N \in \partial W \cup \partial W'$ tel que $\mid c_N - b_N \mid \leq B_2 \mid c_N - c_0 \mid^4$; donc, quand $n \geq N_3$, on a $\mid c_N - c_{N+1} \mid \leq B \mid c_N - c_0 \mid^4$ où $B = B_1 B_2$.



Pour $k \geq N_3$, on a :

$$\mid c_k - c_0 \mid \leq \sum_{N=k}^{\infty} \mid c_k - c_{k+1} \mid \leq B \sum_{N=k}^{\infty} \mid c_N - c_0 \mid^4.$$

Comme $c_N - c_0 = \lambda_N \in \sigma_N$, d'après le pas 1, il existe deux constantes positives a_1 et a_2 telles que : $a_1/N \leq \mid \lambda_N \mid \leq a_2/N$, donc :

$$\frac{a_1}{k} \leq \mid \lambda_k \mid = \mid c_k - c_0 \mid \leq B \sum_{N=k}^{\infty} \mid \lambda_N \mid^4 = B a_2^4 \sum_{N=k}^{\infty} \frac{1}{N^4}, \quad \forall k \geq N_3.$$

Ceci veut dire :

$$0 < \frac{a_1}{B a_2^4} \leq \sum_{N=k}^{\infty} \frac{k}{N^4} < \sum_{N=k}^{\infty} \frac{N}{N^4} = \sum_{N=k}^{\infty} \frac{1}{N^3}, \quad \forall k \geq N.$$

Contradiction, car $\sum \frac{1}{N^3}$ converge.

Cqfd.

EXPOSÉ XVI

IDENTIFICATION DE CYLINDRES : ÉTUDE À LA LIMITE

PIERRE LAVAURS

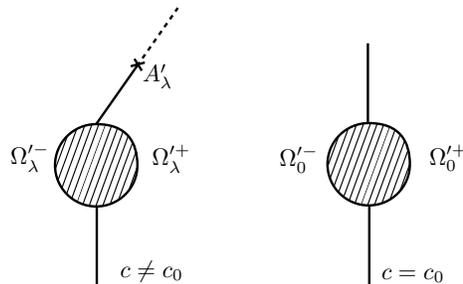
1. Notations et position du problème

On se place dans le même cadre que dans « Arriver à bon port » : $f_{c_0} : z \mapsto z^2 + c_0$ a un cycle indifférent rationnel de valeur propre de $e^{2i\pi p/q}$ et de période k , α_1 est un point du cycle indifférent.

Dans « Arriver à bon port », on a construit, pour c proche de c_0 , q cylindres de Fatou-Ecalle ($2q$ pour $c = c_0$) sous réserve que c tende vers c_0 en étant astreint à rester dans un certain secteur.

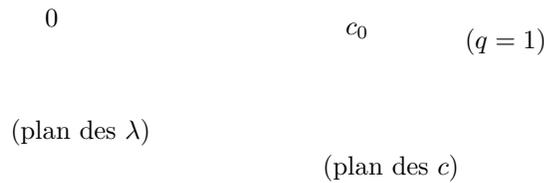
On va modifier légèrement, pour des raisons techniques, la définition des cylindres (sans que cela change les cylindres eux-mêmes!) et la zone dans laquelle évolue c voisin de c_0 .

Au lieu de définir Ω'_λ comme on l'a fait dans XII 3, on le définit en retirant à \mathbb{C} seulement \overline{D}_R , le segment de A'_λ à iR (si $\text{Im } A'_\lambda > 0$; le segment de A'_λ à $-iR$ sinon) et la demi-droite $\text{Re } Z = 0$, $\text{Im } Z \leq -R$ (si $\text{Im } A'_\lambda > 0$; $\text{Im } Z > R$ sinon). En prolongeant le segment de iR (ou $-iR$) à A'_λ jusqu'à l'infini, on partitionne Ω'_λ en Ω'^+_λ et Ω'^-_λ . Enfin, pour $c = c_0$, on coupe par les demi-droites $\text{Re } Z = 0$, $\text{Im } Z \leq -R$ et $\text{Im } Z \geq R$.



Les inégalités de XII montrent que les points rajoutés à Ω'_λ ($\Omega'^+_0, \Omega'^-+_0$) sont équivalents à des points des « anciens » ouverts : ce changement de zone quotientées ne modifie donc pas les cylindres-quotients.

Dans XII, on s'était astreint à faire tendre λ vers 0 avec $|\arg A_\lambda \pm 1/4| \leq 1/12$, ce qui revient, puisque $1/A'_\lambda$ est analytique en λ , à restreindre à des secteurs angulaires privilégiés autour des 2 directions de demi-droites dans le plan des λ correspondant dans le plan des c aux demi-droites tangentes aux deux composantes hyperboliques de M tangentes en c_0 (à la demi-droite pour $q = 1$). Ici, au lieu de faire tendre λ vers 0 dans un secteur angulaire, on le fera tendre entre deux cercles tangents en 0 à la demi-droite privilégiée :

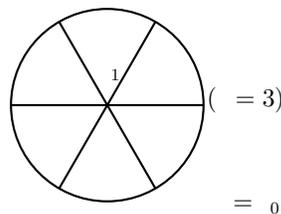


Cette restriction est suffisante pour les applications, car elle laisse c parcourir tout l'extérieur de M en tendant c_0 . Elle a l'avantage suivant : puisque $1/A_\lambda$ et $1/A'_\lambda$ sont analytiques en λ , elle impose à A_λ comme à A'_λ de rester entre deux droites $\text{Re } Z = -K, \text{Re } Z = K$. De ce fait, $\{(\lambda, Z) \mid Z \in \Omega_\lambda'^-\}$ et $\{(\lambda, Z) \mid Z \in \Omega_\lambda'^+\}$ sont des ouverts de $V \times \mathbb{C}$ (V désignant la zone où évolue λ) : si un point est dans $\Omega_0'^-$ (resp. $\Omega_0'^+$), il est dans $\Omega_\lambda'^-$ (resp. $\Omega_\lambda'^+$) pour λ assez proche de 0.

Pour fixer les notations, nous supposons que nous avons choisi dans le plan des λ de rester autour d'une demi-droite correspondant à $\text{Im } A_\lambda > 0$ (et donc aussi $\text{Im } A'_\lambda > 0$).

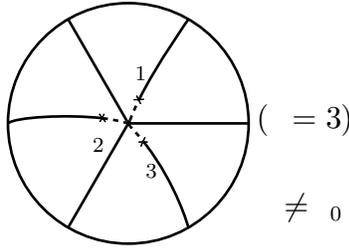
Regardons ce que ces motifs fournissent dans le plan des z :

- Pour $c = c_0$, les $2q$ cylindres sont les quotients de $2q$ secteurs angulaires égaux dans un disque centré en α_1 .



- Pour c voisin de c_0 , ∂D_R correspond à un cercle « proche » du précédent ; α_1 se « scinde » en un $\alpha(c)$ fixe par f_c^k et un cycle $\beta_1(c), \dots, \beta_q(c)$ pour f_c^k , α et les β_i étant continues en c (dans la zone désormais notée Θ à laquelle on a restreint c). α correspond à ∞ dans le plan des Z , β_1 (par exemple) à A'_λ . On a q cylindres seulement. Cependant, si on représente aussi (en pointillés sur le schéma ci-dessous)

les courbes limitant, quand on les transforme dans le plan des Z , les Ω_λ^+ des Ω_λ^- , on voit qu'on peut considérer aussi qu'on a, comme pour $c = c_0$, $2q$ cylindres qui s'identifient naturellement deux à deux.



Nous allons étudier le cylindre autour de $\beta_1(c)$, qui devient donc deux cylindres quand c devient c_0 .

Les zones correspondant à Ω'_λ ($\Omega_\lambda^+, \Omega_\lambda^-$) dans le plan des z seront notés $U(c)$ ($U^+(c), U^-(c)$).

$\mathcal{U}^+ = \{(c, z)/z \in U^+(c)\}$ (resp. \mathcal{U}^-) sont des ouverts de $\Theta \times \mathbb{C}$.

Le cylindre $U(c)/f_c^{kq}$ sera noté $E(c)$ comme dans XII.

Pour $c = c_0$, on a un $E^+(c_0)$ et un $E^-(c_0)$; la zone fournissant $E^-(c_0)$ étant entièrement incluse dans une composante de $\overset{\circ}{K}_{c_0}$, celle fournissant $E^+(c_0)$ contient un interpétale.

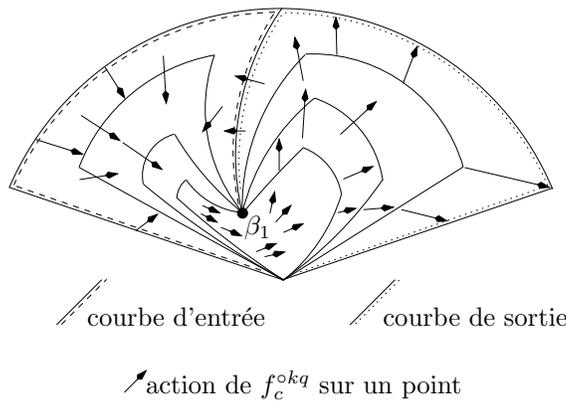
La « courbe de sortie » sera la courbe $\partial U \cap \partial U^+$.

La « courbe d'entrée » sera la courbe $\partial U \cap \partial U^-$.

Elles joignent toutes deux α à β_1 .

Le « domaine fondamental de sortie » W_0 dans U^+ sera limité par la courbe de sortie et son image réciproque par f_c^{kq} dans U^+ . De même, le « domaine fondamental d'entrée » Y_1 dans U^- sera limité par la courbe d'entrée et son image par f_c^{kq} .

Le schéma ci-dessous symbolise la dynamique de f_c^{kq} dans U :



W_0 et Y_1 sont des domaines fondamentaux des cylindres (identifiés pour $c \neq c_0$) de f_c au voisinage de α_1 (conventionnellement, nous considérerons que ni W_0 ni Y_1 ne contiennent les points α et β_1 et contiennent la courbe d'entrée pour Y_1 et la courbe de sortie pour W_0).

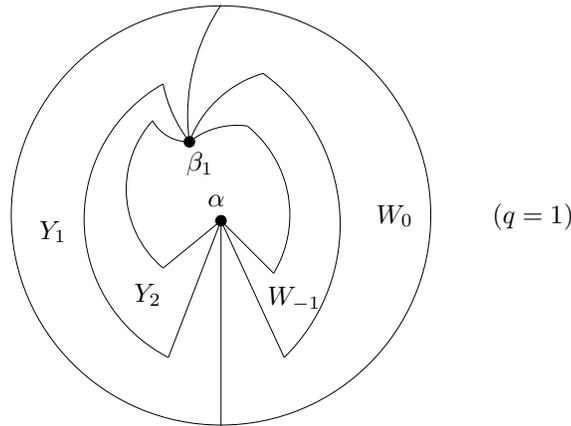
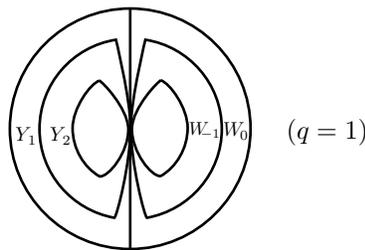


FIGURE 1. Les ensembles Y_i et W_i .

Pour $i \geq 0$, la zone Y_{i+1} sera définie comme $(f_c^{kq})^i(Y_1)$.
 Pour des $i < 0$ pas trop petits, on va définir par récurrence un W_i . Supposons W_{i+1} défini comme une partie de U limitée par deux courbes envoyées l'une sur l'autre par f_c^{kq} ; W_{i+1} ne contient alors pas de valeur critique de f_c^{kq} : on peut définir la détermination de $(f_c^{kq})^{-1}$ sur W_{i+1} qui envoie l'une des deux courbes qui le borne sur l'autre; l'image de cette détermination sera W_i sous réserve qu'elle soit incluse dans U .

Les inégalités de XII prouvent que W_i est défini pour $|i| \leq \frac{0,8|A|}{\pi}$, donc sur une partie de \mathbb{Z} qui tend vers \mathbb{Z}^- quand $c \rightarrow c_0$.



Prenons un point marqué P^+ dans $U^+(c_0)$ et un P^- dans $U^-(c_0)$: pour c proche de c_0 , ils sont tous deux dans $U(c)$; ils fournissent donc un point $\tilde{P}^-(c)$ et un point $\tilde{P}^+(c)$ dans $E(c)$ (dans $E^-(c_0)$ et $E^+(c_0)$ pour $c = c_0$).

Tous les cylindres E^+ et E^- peuvent avoir leurs extrémités indexées de façon naturelle : l'une correspond au voisinage de ∞ dans le plan des Z , l'autre de A'_λ ; sur le domaine fondamental W_0 ou Y_1 , cela correspond d'un côté au voisinage de α , de l'autre au voisinage de β_1 . Quand c devient c_0 , α et β_1 se confondent, mais dans le domaine fondamental correspondant à W_0 ou Y_1 dans le plan des Z , le bout qui correspondait au voisinage de β_1 est représenté par $\text{Im } Z > 0$, l'autre par $\text{Im } Z < 0$. On peut donc parler, même pour $c = c_0$, de « bout en β_1 » et de « bout en α » du cylindre.

Le point marqué et le marquage des bouts du cylindre fournissent alors une identification de E^+ à \mathbb{C}^* en envoyant \tilde{P}^+ sur 1 et le « bout en β_1 » sur le « bout en zéro ». De même, on identifiera E^- à \mathbb{C}^* .

Il peut être pratique de préférer modéliser les cylindres par \mathbb{C}/\mathbb{Z} plutôt que par \mathbb{C}^* . Dans ce modèle, \tilde{P} est identifié à 0, le « bout en β_1 » au bout en « $\text{Im } z < 0$ ». \mathbb{C}/\mathbb{Z} et \mathbb{C}^* étant identifiables par $z \mapsto \exp(-2i\pi z)$, il sera aisé de transcrire les résultats, que nous montrerons dans le « modèle \mathbb{C}^* », dans le « modèle \mathbb{C}/\mathbb{Z} ».

Pour $c \neq c_0$, E^+ et E^- sont en fait le même cylindre qu'on a identifié par deux isomorphismes différents φ^+ et φ^- à \mathbb{C}^* ; $\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1}$ fournit alors un isomorphisme de \mathbb{C}^* sur \mathbb{C}^* qui respecte la position de 0 et donc de la forme $z \mapsto G(c) \cdot z$, pour un $G(c) \in \mathbb{C}^*$.

$G(c)$ recèle sous forme concise l'information sur la dynamique de f_c^{kq} entre la courbe d'entrée et la courbe de sortie : partant d'un point de Y_1 , en itérant un grand nombre de fois, on arrive en W_0 . Il risque dès lors d'être difficile de contrôler la stabilité de divers phénomènes au cours de tant d'itérations. Mais, si on regarde $E^-(c) = Y_1/f_c^{kq}$ et $E^+(c) = W_0/f_c^{kq}$, la connaissance de $G(c)$ fournit le passage « direct » de l'un à l'autre.

Puisqu'il n'y a pas d'identification naturelle entre $E^-(c_0)$ et $E^+(c_0)$, on doit s'attendre à ce que $G(c)$ n'ait pas de limite quand c tend vers c_0 . On va en donner un développement limité. L'objet de cet exposé est de prouver le

Théorème 1. — *Quand c tend vers c_0 , assujetti à rester dans Θ , λ étant la coordonnée définie dans XI (i.e. $c = c_0 + \lambda$ si $q \neq 1$, $c = c_0 + \lambda^2$ si $q = 1$), on a :*

$$G(c) = \exp\left(g_0 + \frac{k}{\lambda} + o(1)\right).$$

Complément. — $\rho_1(\lambda)$ désignant la valeur propre du cycle de f_c^{kq} issu de $\beta_1(c)$, $k = 4\pi^2/\rho_1'(0)$; ainsi k/λ évolue dans une bande autour de l'axe imaginaire pur positif.

Remarque. — On a ici énoncé le théorème en prenant pour modèle \mathbb{C}^* . Si on préfère travailler en termes de \mathbb{C}/\mathbb{Z} , la multiplication par G est remplacée par la translation identifiée à un élément G de \mathbb{C}/\mathbb{Z} , et le développement limité devient : $G(c) = G_0 +$

$k/\lambda + o(1) \pmod{\mathbb{Z}}$, où ici $k = 2i\pi/\rho_1'(0)$ est tel que k/λ évolue dans une bande autour de l'axe réel négatif.

Exemple. — $c_0 = 1/4$, les points fixes de f_c pour c proche de c_0 sont $(1 \pm \sqrt{1 - 4c})/2$. Prenons λ proche de l'axe réel positif. Pour avoir $\text{Im } A'_\lambda > 0$, on doit choisir $\alpha = (1 + i\lambda)/2$ et $\beta = (1 - i)\lambda/2$; donc $\rho_1'(0) = -i$ et $G(c) = \exp(g_0 + \frac{4\pi^2}{\lambda}i + o(1))$, ou, dans le modèle \mathbb{C}/\mathbb{Z} , $G(c) = G_0 - 2\pi/\lambda + o(1)$.

2. Continuité de la projection sur E

Le choix d'un point de base nous a permis d'identifier tous les E^- (resp. E^+) à \mathbb{C}^* . On a alors la :

Proposition 1. — L'application $\pi^+ : \mathcal{U}^+ \rightarrow \mathbb{C}^*$ (resp. $\pi^- : \mathcal{U}^- \rightarrow \mathbb{C}^*$) qui à (c, z) associe la projection de z sur $E^+(c)$ (resp. $E^-(c)$) identifié à \mathbb{C}^* est continue.

Remarque. — Ce que cette proposition exprime (et c'est en ces termes que nous la rappellerons quand nous l'utiliserons), c'est qu'un dessin-limite dans le plan fournit un dessin-limite sur les cylindres.

Lemme. — Soit C_R la couronne comprise entre les cercles $|s| = 1/R$ et $|s| = R$, avec $R > e^{2\pi}$, et soit h univalente de C_R dans \mathbb{C}^* de sorte que l'image de C_R enserme 0, du même côté que C_R , avec $h(1) = 1$.

Alors, pour $u \in C_R$, on a une inégalité $|h(u) - u| \leq f(u, R)$ où, quand u varie dans un compact K de \mathbb{C}^* et R tend vers l'infini (donc $K \subset C_R$ pour R assez grand), $f(u, R)$ tend vers zéro uniformément sur K .

Preuve du lemme. — Soit d'abord $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ univalente avec $f(0) = 0$ et $f(a) = a$ (pour un $a \in]0, 1[$). Alors, pour $|z| \leq r$, on a une détermination de $\text{Log } f(z)/z$ qui vérifie :

$$\left| \text{Log } \frac{f(z)}{z} \right| \leq 2|\text{Log}(1-r)(1-a)|.$$

En effet, pour $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ univalente avec $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$, on a pour tout $z \in D$ (cf. [G], p. 117, inégalité (19)) :

$$(1) \quad \left| \text{Log } \frac{g(z)}{z} + \text{Log}(1 - |z|^2) \right| \leq \text{Log } \frac{1 + |z|}{1 - |z|},$$

où $\text{Log } g(z)/z$ est la détermination continue sur \mathbb{D} qui vaut 0 en 0.

Prenons $g(z) = f(z)/f'(0)$.

— En appliquant (1) à $z = a$, on trouve $|\text{Log } f'(0)| \leq 2|\text{Log}(1-a)|$ pour une détermination bien choisie de $\text{Log } f'(0)$;

— En appliquant (1) en z , on trouve alors une détermination de $\text{Log } f(z)/z$ telle que :

$$\left| \text{Log } \frac{f(z)}{z} - \text{Log } f'(0) \right| \leq 2|\text{Log}(1 - |z|)| \leq 2|\text{Log}(1 - r)|;$$

donc que $|\operatorname{Log} f(z)/z| \leq 2|\operatorname{Log}(1-r)(1-a)|$.

On va prouver que, pour $\exp(\sqrt{\operatorname{Log}^2 R - \pi^2})^{-1} \leq |u| \leq \exp(\sqrt{\operatorname{Log}^2 R - \pi^2})$, il y a une détermination principale,

$$\left| \frac{\operatorname{Log} h(u)}{\operatorname{Log} u} \right| \leq \left(1 - \frac{2\pi}{\operatorname{Log} R} \right)^{-2} \left(1 - \frac{\sqrt{\operatorname{Log}^2 |u| + \pi^2}}{\operatorname{Log} R} \right)^{-2},$$

ce qui fournit bien une inégalité de la forme cherchée. On pourrait sans aucun doute raffiner considérablement cette inégalité : la démonstration qui suit utilise très peu d'informations par rapport à ce que peut nous apporter la situation. Cependant cette inégalité nous suffira ici.

h fournit par passage aux logarithmes une application univalente g de la bande $-\operatorname{Log} R \leq \operatorname{Im} z \leq \operatorname{Log} R$ dans \mathbb{C} ; on peut supposer $h(0) = 0$: vu l'hypothèse sur la position relative de zéro et de $h(C_R)$, on a $g(2i\pi) = 2i\pi$. Considérons alors l'application $f : z \mapsto \frac{g(zi \operatorname{Log} R)}{\operatorname{Log} R}$ univalente de \mathbb{D} dans \mathbb{C} .

On a $f(0) = 0$ et $f(2\pi/\operatorname{Log} R) = 2\pi/\operatorname{Log} R$. Les bornes entre lesquelles on laisse varier u ont été choisies de telle sorte que la détermination principale de $\operatorname{Log} u$ soit assez petite en module pour qu'on puisse majorer $|\operatorname{Log} u|/\operatorname{Log} R$ par $r = \sqrt{\operatorname{Log}^2 |u| + \pi^2}/\operatorname{Log} R \leq 1$, donc que $\operatorname{Log} u/\operatorname{Log} R \in \mathbb{D}$. Ce qui précède assure alors l'existence d'une détermination de

$$\operatorname{Log} \frac{f\left(\frac{\operatorname{Log} u}{i \operatorname{Log} R}\right)}{\frac{\operatorname{Log} u}{i \operatorname{Log} R}} = \operatorname{Log} \frac{g(\operatorname{Log} u)}{\operatorname{Log} u} = \operatorname{Log} \left(\frac{\operatorname{Log} h(u)}{\operatorname{Log} u} \right)$$

pour une détermination de $\operatorname{Log} h(u)$, qui est telle que :

$$\operatorname{Log} \left(\frac{\operatorname{Log} h(u)}{\operatorname{Log} u} \right) \leq 2 \left| \operatorname{Log} \left(1 - \frac{2\pi}{\operatorname{Log} R} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{\operatorname{Log}^2 |u| + \pi^2}}{\operatorname{Log} R} \right) \right|;$$

$$\text{d'où} \quad \left| \frac{\operatorname{Log} h(u)}{\operatorname{Log} u} \right| \leq \left(1 - \frac{2\pi}{\operatorname{Log} R} \right)^{-2} \left(1 - \frac{\sqrt{\operatorname{Log}^2 |u| + \pi^2}}{\operatorname{Log} R} \right)^{-2}. \quad \text{Cqfd.}$$

Preuve de la proposition. — On va montrer la continuité de π^- en un point (c_1, z_1) de \mathcal{U}^- (pour π^+ , il faudrait simplement remplacer Y_i par W_i dans la démonstration ci-dessous ; pour alléger les notations les indices $-$ de π^- et de $E(c)^-$ seront omis dans cette preuve).

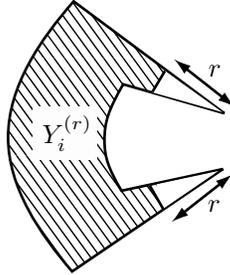
On prend i tel que $z_1 \in Y_i(c_1)$.

Si z_1 n'est pas sur le bord de $Y_i(c_1)$, pour (c, z) assez proche (c_1, z_1) , $z \in Y_i(c_1)$.

S'il est sur le bord de Y_i , cela ne pose pas de problème essentiel : en augmentant légèrement R dans la construction de XII, les cylindres ne sont pas modifiés, mais

Y_i est légèrement décalée, ce qui ramène au cas $z_1 \in \overset{\circ}{Y}_i(c_1)$, ce qu'on supposera dorénavant.

Pour $r > 0$, on va définir $Y_i^{(r)}(c) \subset Y_i(c)$: on prend sur celle des deux courbes limitant $Y_i(c)$ envoyée sur l'autre par f_c^{kq} les points sis à distance r de α et β_1 sur les morceaux de courbe aboutissant en ces points, et on tronque $Y_i(c)$ par les segments joignant ces points à leurs images :



$Y_i^{(r)}(c)/f_c^{kq}$ est alors un cylindre $E^{(r)}(c)$ de module fini.

Sur chaque $Y_i(c)$, $\tilde{P}^+(c)$ fournit un point marqué, qui est donc dans $Y_i^{(r)}(c)$ pour r assez petit (il varie continûment avec c puisqu'image par f_c^{kqi} d'un point fixe du plan des z). Il y a alors une manière unique d'identifier conformément $E^{(r)}(c)$ à un anneau $C_{R_1 R_2}$ de la forme $R_1 < |z| < R_2$ dans \mathbb{C}^* en envoyant le point marqué en 1, et respectant la position par rapport à zéro de $E^{(r)}(c)$ plongé dans $E(c)$ identifié à \mathbb{C}^* . On notera $i_c^{(r)}$ l'isomorphisme entre $E^{(r)}(c)$, considéré comme une partie de \mathbb{C}^* et $C_{R_1 R_2}$.

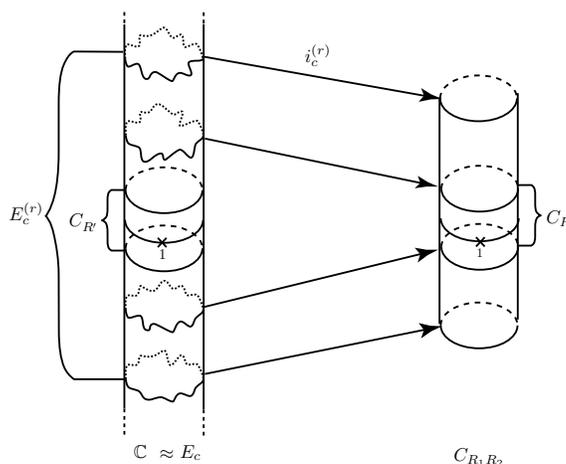
Il est évident que R_2/R_1 , module de $E^{(r)}(c)$, tend vers ∞ quand r tend vers zéro ; il l'est un peu moins que R_2 tend vers ∞ et que R_1 tend vers zéro.

C'est une conséquence du problème extrémal de Teichmüller (cf. [AHL], p. 35–37) : pour r assez petit, $E^{(r)}(c)$ contient un anneau symétrique C_R symétrique par rapport au cercle unité de module $2M$ arbitrairement grand.

$i_c^{(r)}$ transporte alors le cercle-unité en une courbe passant par 1 : l'anneau limité par cette courbe et le cercle $|z| = R_2$ est donc de module plus grand que M . Le problème extrémal de Teichmüller garantit (avec les notations de [AHL] que $M \leq \frac{1}{2\pi} \text{Log} \psi(R_2) \leq \frac{1}{2\pi} \text{Log}[16(R_2 + 1)]$ (cf. [AHL], p. 47) ; donc R_2 peut être rendu arbitrairement grand. De même, R_1 tend vers zéro avec r .

On a donc obtenu la garantie que, pour r assez petit, $C_{R_1 R_2}$ contient la couronne C_R pour un R fixé. Par le même raisonnement appliqué à $i_c^{(r)-1}(C_R)$, pour R assez grand, $i_c^{(r)-1}(C_R)$ contient $C_{R'}$ pour un R' fixé.

On peut envoyer $Y_i^{(r)}(c)$ sur $Y_i^{(r)}(c_1)$ par un morphisme $\Phi_{(c, c_1)}^{(r)}$ de classe C^1 qui commute avec la dynamique de f_c^k sur les courbes qui limitent $Y_i^{(r)}(c)$ sur $Y_i^{(r)}(c_1)$,



envoie le point marqué sur le point marqué et tend vers Id en norme C^1 quand c tend vers c_1 .

$\Phi_{(c,c_1)}^{(r)}$ induit une application $\tilde{\Phi}_{(c,c_1)}^{(r)}$ de $E_c^{(r)}$ sur $E_{c_1}^{(r)}$ qui laisse 1 fixe et est quasi-conforme de rapport de dilatation tendant vers 1.

$i_{(c_1)}^{(r)} \circ \tilde{\Phi}_{(c,c_1)}^{(r)} \circ i_{(c)}^{(r)-1}$ est alors une application entre deux « vraies » couronnes, qui fixe 1, et qui est quasi-conforme de rapport de dilatation qui tend vers 1. Elle tend donc vers l'identité uniformément sur tout compact.

Dès lors, si $\pi^{(r)}(c, z)$ désigne $i_c^{(r)} \circ \pi(c, z)$ pour $z \in Y_i^{(r)}(c)$, $\pi^{(r)}(c, z)$ tend vers $\pi^{(r)}(c_1, z_1)$ quand (c, z) tend (c_1, z_1) .

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On prend un R' assez grand pour que $\pi(c_1, z_1) \in C_{R'}$. On prend alors R_1 assez grand pour que, si $C_{R_1} \subset i_c^{(r)}(E^{(r)}(c))$, on ait $C_{R'} \subset i_c^{(r)-1}(C_{R_1})$. Puis, on prend R_2 assez grand pour que, pour $v \in \overline{C_{R_1}}$, $f(v, R_2) < \varepsilon/3$. Enfin, on prend r assez petit pour que $i_{c_1}^{(r)}(E^{(r)}(c_1))$ (et donc aussi $i_c^{(r)}(E^{(r)}(c))$ pour c assez proche de c_1) contienne C_{R_2} .

Puisque $\pi(c_1, z_1) \in C_{R'} \subset i_{c_1}^{(r)-1}(C_{R_1})$, $\pi^{(r)}(c_1, z_1) \in C_{R_1}$.

Appliquons le lemme à $i_{c_1}^{(r)-1}$ sur C_{R_2} : on obtient

$$|\pi(c_1, z_1) - \pi^{(r)}(c_1, z_1)| < \varepsilon/3.$$

Pour (c, z) assez proche de (c_1, z_1) , on a alors : $|\pi^{(r)}(c_1, z_1) - \pi^{(r)}(c, z)| < \varepsilon/3$ et $\pi^{(r)}(c, z)$ est toujours dans C_{R_1} .

En appliquant le lemme à $i_c^{(r)-1}$, on a : $|\pi(c, z) - \pi^{(r)}(c, z)| < \varepsilon/3$. D'où

$$|\pi(c, z) - \pi(c_1, z_1)| < \varepsilon. \quad \text{Cqfd.}$$

Corollaire. — G est continue (sur $\Theta \setminus \{c_0\}$).

Démonstration. — Soit c_1 le point où on veut vérifier la continuité de G . Il existe alors un n tel que $f_{c_1}^n(P^-) \in W_{-1} \subset U^+(c_1)$. Pour c assez proche de c_1 pour que $f_c^n(P^-) \in U^+(c)$, on a alors $G(c) = \pi^+(c, f_c^n(P^-))$. Cqfd.

3. Le germe F

Par construction des cylindres, un voisinage de β_1 dans W_0 est envoyé par f_c^{kq} sur un voisinage de β_1 dans Y_1 ; ce phénomène reste vrai pour $c = c_0$ (β_1 devenant α_1 , et le voisinage étant restreint à une « pointe » de la zone W_0).

Par passage aux quotients, on obtient une application $F(c)$ holomorphe bijective d'un voisinage du « bout en zéro » de $E^+ = W_0/f_c^{kq}$ identifié à \mathbb{C}^* et du « bout en zéro » de $E^- = Y_1/f_c^{kq}$ également identifié à \mathbb{C}^* .

Considérée d'un voisinage de zéro dans \mathbb{C}^* vers un voisinage de zéro dans \mathbb{C}^* , $F(c)$ est prolongeable par continuité par $[F(c)](0) = 0$: ainsi prolongée, elle est alors holomorphe, sans point critique en zéro.

On notera $L(c)$ l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^* \approx E^+ &\longrightarrow \mathbb{C}^* \approx E^- \\ z &\longmapsto [F(c)]'(0) \cdot z. \end{aligned}$$

C'est le morphisme de cylindres tangent à $F(c)$.

Pour calculer un développement limité de $G(c)$ on va étudier $L(c) \circ G(c)$ (on identifie ici par abus de langage le nombre complexe $G(c)$ à l'application $z \mapsto G(c) \cdot z$). L'avantage est qu'on a ici un automorphisme d'un cylindre, qu'on peut étudier en regardant son comportement en un bout, et en oubliant l'information contenue au point marqué.

$F(c)$ est défini pour c_0 également : on peut espérer avoir $L(c) \rightarrow L(c_0)$ quand $c \rightarrow c_0$, ce qui permettra de repasser du développement limité de $L(c) \circ G(c)$ à un développement limité de $G(c)$.

4. Comportement limite de $L(c)$

Proposition 2. — *Quand $c \rightarrow c_0$, $L(c) \rightarrow L(c_0)$.*

Démonstration. — Remarquons qu'on peut trouver un r fixe tel que, dans le plan des z , l'intersection du disque centré en β_1 et de rayon r et du « bout » de W_0 proche de β_1 (i.e. celui qui correspond dans le plan des Z à $\text{Im } Z > 0$) soit envoyée par f_c^{kq} dans Y_1 ; « une position limite sur le plan fournissant une position limite sur le cylindre », il y a un voisinage fixe de 0 dans \mathbb{C}^* où $F(c)$ est définie.

Prenons une courbe fermée γ d'indice 1 autour de 0 incluse dans ce voisinage. On peut la développer dans $U^+(c_0)$ en un arc (non fermé) Γ_{c_0} ; par la proposition du §2, on peut la développer pour c proche de c_0 en un arc Γ_c proche de Γ_{c_0} (au sens de la convergence uniforme).

$L(c)$ peut alors être calculé à l'aide de la formule de Cauchy sur γ par :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{[F(c)](u)}{u^2} du = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_c} \frac{\pi_c^-(f_c^{kqN}(z))}{[\pi_c^+(z)]^2} \left(\frac{d\pi_c^+}{dz} \right) dz$$

où π_c désigne la fonction $z \mapsto \pi(c, z)$ et N est choisi assez grand pour que $f_c^{kqN}(\Gamma_c) \subset U^-(c)$. Dans cette intégrale, le chemin d'intégration comme la fonction intégrée varient continûment en c , d'où le résultat. Cqfd.

5. Étude de $L(c) \circ G(c)$ ($c \neq c_0$)

$L(c) \circ G(c)$ est l'application tangente à $F(c) \circ G(c)$ au voisinage de 0 dans $E(c) \approx \mathbb{C}^*$. Elle est déterminée par la connaissance purement locale de la dynamique de f_c^{kq} autour de β_1 .

Nous allons voir qu'elle peut être calculée fort simplement.

Comme annoncé au § 1, $\rho_1(\lambda)$ désigne la valeur propre du cycle de f_c^{kq} issu de $\beta_1(c)$; lorsque $|\rho_1(\lambda)| \neq 1$, f_c^{kq} est linéarisable au voisinage de β_1 . Nous poserons $\rho_1 = \rho_1(\lambda) = re^{2i\pi\theta}$. Comme on est dans le cas $\text{Im } A'_\lambda > 0$, on a $\text{Im } \rho_1 < 0$.

Considérons

$$\begin{array}{ccc} g : \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \rho_1 \cdot z, \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} p : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ u & \longmapsto & \exp(u) \end{array} \quad \text{revêtement universel.}$$

g induit une application $\tilde{g} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$; nous conviendrons qu'elle envoie 0 sur la détermination principale $\text{Log } \rho_1$ du logarithme de ρ_1 , soit $\tilde{g} : u \mapsto u + \text{Log } \rho_1$. $\tilde{\tau}$ désignera l'application $u \mapsto u + 2i\pi$ de \mathbb{C} dans \mathbb{C} (changement de feuillet). On a : $\tilde{\tau} \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ \tilde{\tau}$.

On peut identifier le cylindre \mathbb{C}/\tilde{g} à \mathbb{C}^* en envoyant le « bout en $\text{Re } u < 0$ » sur 0 (ρ_1 n'est pas réel); $\tilde{\tau}$, qui commute à \tilde{g} , induit alors un isomorphisme $K(\rho_1) : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Lemme. — Si $|\rho_1(c)| \neq 1$, $L(c) \circ G(c) = K(\rho_1)$.

Démonstration. — Prenons un voisinage de β_1 assez petit pour que f_c^{kq} y soit linéarisable; on peut corriger analytiquement f_c^{kq} sur ce voisinage à g au voisinage de zéro. La « fente » Γ séparant Y_1 de W_0 devient une courbe Γ qui admet une tangente en zéro.

$U \setminus \Gamma/f_c^{kq}$ s'identifie alors à \mathbb{C}/\tilde{g} .

Examinons ce que devient $F(c) \circ G(c)$ (défini au voisinage de β_1 dans ce modèle : On part d'un point y dans le domaine fondamental pour g limité par Γ et $g(\Gamma)$; on prend les images successives de y par g jusqu'à se retrouver dans ce domaine fondamental en n itérations. En termes de revêtement universel, partons de $\text{Log } y$ (détermination principale) et appliquons \tilde{g} n fois : nous tombons sur $\text{Log}(g^n(y)) - 2i\pi$ (Log désignant encore la détermination principale) qui est donc \tilde{g} -équivalent à $\text{Log } y$; l'application déduite de $F(c) \circ G(c)$ en identifiant $U \setminus \Gamma/f_c^{kq}$ à \mathbb{C}/\tilde{g} envoie, elle, la projection

de $\text{Log } y$ sur celle de $\text{Log}(g^n(y))$, qui est justement \tilde{g} -équivalente à $\tilde{\tau}(\text{Log } y)$: c'est donc la restriction de K à un voisinage de 0, donc $L(c) \circ G(c) = K(\rho_1)$. Cqfd.

Preuve du théorème (énoncé au § 1). — Il ne reste donc plus qu'à calculer $K(\rho_1)$. \mathbb{C}/\tilde{g} peut être identifié à \mathbb{C}^* par $u \mapsto \exp\left(\frac{-2i\pi u}{\text{Log } \rho_1}\right)$ (compte tenu de $\text{Im}(\text{Log } \rho_1) < 0$, le signe — permet de bien envoyer le « bout » $\text{Re } u < 0$ sur le « bout » en zéro). $K(\rho_1)$ envoie la projection de 0 sur celle de $2i\pi$ soit 1 sur $\exp\left(\frac{4\pi^2}{\text{Log } \rho_1}\right)$, d'où $L(c) \circ G(c) = \exp\left(\frac{4\pi^2}{\text{Log } \rho_1(\lambda)}\right)$. $\rho_1(\lambda)$ est de degré 1 en zéro; pour $q = 1$, $\rho_1(\lambda) = \rho(-\lambda)$ est de degré 1 d'après XII corollaire 2 du théorème 1; pour $q > 1$, cela découle de l'analyse de l'aspect des composantes hyperboliques de M tangentes en c_0 (et en fait de façon indirecte de ce corollaire 2). On peut donc écrire $\text{Log } \rho_1(\lambda) = \rho_1(0) \cdot \lambda + o(\lambda)$ avec $\rho_1(0) \neq 0$; d'où $L(c) \circ G(c) = \exp\left[\frac{4\pi^2}{\rho_1'(0)} + K'_0 + o(1)\right]$.

Comme $L(c)$ a une limite, $G(c) = \exp\left[\frac{4\pi^2}{\rho_1'(0)} + C_0 + o(1)\right]$.

Ce développement n'est *a priori* valable que lorsque $|\rho_1(\lambda)| \neq 1$, mais comme $G(c)$ est continue, il l'est partout. Cqfd.

Références

- [AHL] L.V. AHLFORS — *Lectures on quasi conformal mappings*, Van Nostrand Company, 1966.
- [G] G.M. GOLUSIN — *Geometric theory of functions of a complex variable*, Translations of mathematical monographs, American Mathematical Society, 1969.

EXPOSÉ XVII

UNE PROPRIÉTÉ DE CONTINUITÉ

PIERRE LAVAURS

1. Cassure des rayons d'argument rationnel

Pour un $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ nous noterons $\mathcal{R}(M, \theta)$ le rayon externe de M d'argument θ , et $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ le rayon externe de K_c (ensemble de Julia de $z \mapsto z^2 + c$) paramétré par le potentiel. Ce dernier peut se casser : dans ce cas, il n'est pas défini sur \mathbb{R}^* tout entier. Nous conviendrons que les rayons sont orientés dans le sens des potentiels décroissants : avancer sur un rayon, ce sera se déplacer de l'infini vers M ou K_c . Enfin, il faut noter que même lorsque $\mathcal{R}(M, \theta)$ ou $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ a un aboutissement, nous considérons que ce point ne fait pas partie du rayon.

Dans tout cet exposé, on s'intéressera à des $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Proposition 1. — *L'ensemble des points c de \mathbb{C} pour lesquels le rayon $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ se casse est $\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}(M, 2^n \theta)$ (et donc puisque $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est prépériodique pour la multiplication par deux la réunion d'un nombre fini de rayons externes de M).*

Démonstration

– Si $c \in \mathcal{R}(M, 2^n \theta)$ pour un $n \geq 1$, l'argument externe de c pour K_c est $2^n \theta$. De ce fait, le rayon $\mathcal{R}(K_c, 2^{n-1} \theta)$ arrive sur zéro, et se casse, donc aussi $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ qui en est une image réciproque $(n-1)$ -ème.

– Réciproquement si c n'est sur aucun $\mathcal{R}(M, 2^n \theta)$ ($n \geq 1$), soit $2^\ell \theta, \dots, 2^{\ell+d-1} \theta$ le cycle pour la multiplication par 2 sur lequel tombe θ . Les rayons $\mathcal{R}(K_c, 2^j \theta)$ ($\ell \leq j \leq \ell + d - 1$) sont définis au voisinage de l'infini, soit prenant alors pour chaque j l'image réciproque par $z \mapsto z^2 + c$ de $\mathcal{R}(K_c, 2^{j+1} \theta)$ restreint à $[t, 2t]$ ayant pour extrémité terminale $\mathcal{R}(K_c, 2^j \theta(t))$, on prolonge tous les $\mathcal{R}(K_c, 2^j \theta)$ ($\ell \leq j \leq \ell + d - 1$) à $[t/2, +\infty[$, sans toujours passer sur c . En réitérant l'opération, on voit alors que les $\mathcal{R}(K_c, 2^j \theta)$ peuvent être définis sur \mathbb{R}^* tout entier pour $\ell \leq j \leq \ell + d - 1$. Il en est alors de même des $\mathcal{R}(K_c, 2^i \theta)$ ($0 \leq i \leq \ell - 1$) qu'on peut ainsi construire par récurrence sur $\ell - i$, puisqu'ils ne passent pas sur c pour $i \geq 1$. Cqfd.

Dès lors pour c dans $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}(M, 2^i \theta)$ (qui contient M), le rayon $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ existe. Par la proposition 2 de VIII, il aboutit alors en un point que nous noterons $\gamma_c(\theta)$.

Si K_c est localement connexe, $\gamma_c(\theta)$ est la valeur en c du lacet de Carathéodory γ_c défini sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} ; dans le cas contraire, $\gamma_c(\theta)$ n'a de sens que sur \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

2. Énoncé et premiers cas

L'objet de cet exposé est de prouver le

Théorème

Pour $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $\gamma_c(\theta)$ est une fonction continue de c sur $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}(M, 2^n \theta)$.

La proposition 3 de VIII nous en fournit la preuve dans la plupart des cas : elle affirme en effet que $\gamma_c(\theta)$ est défini dans un voisinage de $c_0 \in \mathbb{C}$, et continu comme fonction de c dès lors que $\gamma_{c_0}(\theta)$ est prépériodique répulsif et n'est pas sur l'orbite inverse du point critique (si on note $f_c : z \mapsto z^2 + c$, avec les notations de cette proposition, $\gamma_c(\theta) = \psi_{f_c, \theta}(0)$).

Il reste donc deux cas à régler :

- celui d'un point de Misurewicz c_0 quand $\gamma_{c_0}(\theta)$ est sur l'orbite inverse de zéro ;
- celui d'une racine de composante hyperbolique c_0 quand $\gamma_{c_0}(\theta)$ est sur l'orbite inverse du cycle indifférent rationnel (qui contient aussi ce cycle).

Remarque. — En utilisant les conclusions de VIII et XII, on peut voir aisément que nous connaissons en fait ici déjà la continuité de $c \mapsto \gamma_c(\theta)$ sur $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \geq 1} \overline{\mathcal{R}(M, 2^n \theta)}$.

3. Cas des points de Misurewicz

Soit c_0 un point de Misurewicz et $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. On suppose donc qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_{c_0}^n(\gamma_{c_0}(\theta)) = \gamma_{c_0}(2^n \theta) = 0$.

Dès lors, $\mathcal{R}(K_{c_0}, 2^{n+1} \theta)$ aboutit en c_0 , et donc $\mathcal{R}(M, 2^{n+1} \theta)$ aussi d'après le théorème 2 p. 74 de la première partie de ce cours.

D'après le complément 1 du lemme 1 de XIII, aucun des rayons $\mathcal{R}(M, 2^p \theta)$ pour $p \neq n+1$ n'aboutit en c_0 . Comme ceux-ci sont en nombre fini, il existe un voisinage Λ de c_0 qui ne rencontre aucun d'entre eux.

On a alors l'énoncé suivant, analogue à la proposition 3 de VIII.

Proposition 2. — L'application $(c, s) \mapsto \psi_{f_c, \theta}(s)$ de $[\Lambda \setminus \mathcal{R}(M, 2^{n+1} \theta)] \times \mathbb{R}^+$ dans \mathbb{C} est continue.

Démonstration. — D'après la Proposition 3 de VIII, $(c, s) \mapsto \psi_{f_c, 2^{n+1} \theta}(2^{n+1} s)$ est continue sur $\Lambda \times \mathbb{R}^+$; on va alors prouver par récurrence descendante sur i que $(c, s) \mapsto \psi_{f_c, 2^i \theta}(2^i s)$ est continue sur $\Lambda \setminus \mathcal{R}(M, 2^{n+1} \theta) \times \mathbb{R}^+$.

Lemme. — Soient

- $f : E \rightarrow F$ un revêtement, avec F localement connexe,
- A un espace topologique,
- $g : A \times [0, 1] \rightarrow F$ (resp. $A \times]0, 1[\rightarrow F$) continue.

Soit $h : A \times [0, 1] \rightarrow E$ (resp. $A \times]0, 1[\rightarrow E$) relevant g (i.e. $f \circ h = g$) qui est

- continu en la variable t parcourant $[0, 1]$ (resp. $]0, 1[$) en tout point,
- continu aux points $(a, 1)$, $a \in A$.

Alors h est continu sur $A \times [0, 1]$ (resp. $A \times]0, 1[$).

Démonstration du lemme. — Il suffit de montrer que pour tout $a \in A$, l'ensemble $T_a = \{t \mid h \text{ est continue au point } (a, t)\}$ est ouvert et fermé dans $[0, 1]$ (resp. $]0, 1[$).

– Il est ouvert : soit (a, t) en lequel h est continue ; prenons V voisinage connexe de $g(a, t)$ assez petit pour que f soit trivial au-dessus de V , et f' l'unique détermination continue de f^{-1} sur V qui vaille $h(a, t)$ en $g(a, t)$. Alors, par continuité de h au point (a, t) , pour (b, s) assez proche de (a, t) , $h(b, s) = f'[g(b, s)]$ donc h est continue (a, s) pour s assez proche de t .

– Il est fermé : soit $t \in \overline{T}$, V comme ci-dessus et U voisinage de (a, t) de la forme $W \times I$ avec I intervalle, tel que $g(U) \subset V$. Par continuité de h en la seconde variable, pour s dans I , $h(a, s) = f'[g(a, s)]$; prenons un tel s dans T : par continuité de h au point (a, s) , pour b assez proche de a , $h(b, s) = f'[g(b, s)]$ donc, par continuité en la seconde variable, et comme $g(\{b\} \times I) \subset V$, on a $h(b, u) = f'[g(b, u)]$ pour b assez proche de a et u dans I , d'où la continuité de h au point (a, b) . Cqfd.

Appliquons alors ce lemme : on prendra pour A l'ensemble $(\Lambda \setminus \mathcal{R}(M, 2^{n+1}\theta))$, on remplacera $[0, 1]$ (ou $]0, 1[$) par $[0, \infty]$ (ou $]0, \infty[$) afin de travailler sur le paramétrage par les potentiels, E et F seront tous deux \mathbb{C}^* auquel on rajoute un point à l'infini dans chaque direction de demi-droites, et f est l'application $z \mapsto z^2$ prolongée de façon évidente à l'infini.

L'application $(c, s) \mapsto \psi_{f_c, 2^i\theta}(2^i s)$ se prolonge à $s = \infty$ en associant à (c, ∞) le point à l'infini de F dans la direction $2^i\theta$.

Passage de $i = n + 1$ à $i = n$. — On peut considérer

$$g : A \times]0, \infty[\longrightarrow F, \quad (c, s) \longmapsto \psi_{f_c, 2^{n+1}\theta}(2^{n+1}s) - c$$

puisque $A \cap \mathcal{R}(M, 2^{n+1}\theta) = \emptyset$, cette application ne prend jamais la valeur zéro et est donc bien à valeurs dans F .

g vérifie alors les hypothèses du lemme.

$$h : A \times]0, \infty[\longrightarrow E, \quad (c, s) \longmapsto \psi_{f_c, 2^n\theta}(2^{n+1}s)$$

est alors un relèvement de g qui vérifie les hypothèses du lemme : il est donc continu sur $A \times]0, \infty[$.

De surcroît, si on étend g à $[0, \infty]$, ce qui est possible (elle n'est alors plus à valeurs dans F mais dans $F \cup \{0\}$), on la sait continue. Dès lors, pour tout $\varepsilon > 0$, pour c assez proche de c_0 et s assez petit, $|\psi_{f_c, 2^{n+1}\theta}(2^{n+1}s) - c| < \varepsilon^2$ donc $|\psi_{f_c, 2^n\theta}(2^n s)| < \varepsilon$.

Si on prolonge h en prenant pour $h(c, 0)$ l'aboutissement du rayon $\mathcal{R}(K_c, 2^n\theta)$, la fonction obtenue est bien continue sur $A \times [0, \infty]$.

Passage de $i+1$ à i pour $i < n$. — Pour $i < n$, le passage de la proposition pour $i+1$ à la proposition pour i est alors plus facile : en effet on peut directement appliquer le lemme sur $[0, \infty]$ à $g : (c, s) \mapsto \psi_{f_c, 2^{i+1}\theta}(2^{i+1}s) - c$ qui est bien à valeurs dans F , car Λ a été choisi assez petit pour ne pas rencontrer de $\mathcal{R}(M, 2^p\theta)$ autre que $\mathcal{R}(M, 2^{n+1}\theta)$. Cqfd.

4. Cas des points admettant un cycle indifférent rationnel

On va se placer dans le même cadre et les mêmes notations que dans XVI. θ est un rationnel à dénominateur impair tel que $\mathcal{R}(K_{c_0}, \theta)$ aboutisse sur α_1 dans K_{c_0} .

Afin de simplifier l'exposition, la démonstration sera explicitée dans le cas où $q = 1$. On montrera à la fin de celle-ci comment la modifier pour q quelconque.

On se limite à faire tendre c vers c_0 dans une zone Θ limitée par deux courbes tangentes à l'ordre 2 en c_0 , on supposera que Θ contient entièrement la zone comprise entre les composantes hyperboliques de M tangentes en c_0 (pour $q = 1$, la zone comprise hors de la composante hyperbolique dont le bord admet un point de rebroussement en c_0).

On va prouver les trois propositions suivantes, pour c dans $\Theta \setminus \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}(M, 2^n\theta)$.

Proposition 3. — *L'aboutissement de $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ est α ou β .*

Proposition 4. — *Pour n fixé et c assez proche de c_0 , $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ ne passe pas sur $f_c^n(0)$.*

Proposition 5. — *Pour $\theta_1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tel qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $2^d\theta_1 = \theta$, l'aboutissement de $\mathcal{R}(K_c, \theta_1)$ est continu au point c_0 comme fonction de c (et en particulier défini pour c assez proche de c_0).*

La proposition 5 permettra de conclure le théorème annoncé en 2 : en effet pour un θ_1 tel que $2^d\theta_1 = \theta$, elle affirme que $\gamma_c(\theta_1)$ tend vers $\gamma_{c_0}(\theta_1)$ quand c tend vers c_0 dans $\Theta \setminus \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}(M, 2^n\theta)$.

Si maintenant on fait tendre c vers c_0 dans M , l'aboutissement de $\mathcal{R}(K_c, \theta_1)$ est une fonction continue de c , puisque c 'est un point prépériodique répulsif. Comme quand c tend vers c_0 dans $M \cap \Theta$, il tend vers $\gamma_{c_0}(\theta_1)$, il tend aussi vers $\gamma_{c_0}(\theta_1)$ quand c tend vers c_0 dans $\overset{\circ}{M}$, d'où la continuité annoncée au point c_0 .

La proposition 3 est un premier pas vers la proposition 5, la proposition 4 est la clef du complément 2 au théorème 1 de XIII.

a) Limitation de la distorsion du rayon dans U . — Pour $c = c_0$, le rayon $\mathcal{R}(K_{c_0}, \theta)$ aboutit en α_1 avec une tangente perpendiculaire au diamètre limitant U^+ . Quitte à augmenter R dans la construction de « Arriver au bon port » XII, on peut dès lors supposer ce rayon est transverse à la courbe de sortie (qui est la courbe par laquelle le rayon entre dans U^+ , avec notre convention d'orientation dans le sens des potentiels décroissants!); on prendra $s(c_0)$ le plus petit paramètre où $\mathcal{R}(K_{c_0}, \theta)$ coupe la courbe de sortie en un point correspondant à un paramètre $s(c)$ proche de $s(c_0)$, puisque ce rayon restreint à $[s(c_0)/2, \infty[$ est une fonction continue de c .

Sur $[s(c_0)/2^k, s(c_0)]$, le rayon $\mathcal{R}(K_{c_0}, \theta)$ évolue alors sur un nombre fini de zones W_i ($i \leq 0$), qu'on notera M_1 .

La restriction de $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ à $[s(c)/2^k, s(c)]$ étant continue en fonction de c , et puisqu'une position limite sur le plan fournit une position limite sur le cylindre (cf. XVI, Proposition 1), pour c assez proche de c_0 , cette courbe est encore sur $M_1 + 1$ domaines W_i au plus.

Cet arc de rayon définit sur le cylindre un lacet injectif; on peut alors reconstituer le rayon de proche en proche tant que l'on reste dans U : ainsi entre $s(c)$ et $s(c)/2^k$, $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ parcourt un chemin sur W_{-M_1}, \dots, W_0 ; sur $[s(c)/(2^k)^2, s(c)/2^k]$ il parcourra un chemin sur $W_{-M_1-1}, \dots, W_{-1}$; si i_0 est le plus grand entier tel que W_{-i_0} soit défini, on pourra ainsi remonter jusqu'à un chemin sur $W_{-i_0}, \dots, W_{-i_0+M_1}$.

Comme $i_0 \geq 0, 8|A|/\pi$, pour c assez proche de c_0 , on a au moins un arc de $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ défini sur un intervalle de la forme $[t/2^k, t]$ évoluant entre W_{j_1} et W_{j_2} pour $j_1 = E(-0, 3|A|/\pi)$ et $j_2 = E(-0, 7|A|/\pi)$ (E désigne la partie entière).

Par les inégalités de XII, un W_j pour $j_2 \leq j \leq j_1$ est entièrement recouvert par des Y_i , en nombre fini. Dès lors, l'arc $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ évolue entre t et $t/2^k$ sur un nombre fini $M(c)$ de domaines Y_i . De plus, t peut être choisi de telle sorte que $\mathcal{R}(K_c, \theta)(t)$ soit sur un ∂Y_i et qu'entre t et $t/2^k$, $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ évolue dans des $Y_{i'}$, avec $i' \leq i$: il suffit de prendre t le plus petit possible pour que $\mathcal{R}(K_c, \theta)(t)$ soit sur Y_i parmi les $t \geq s(c)/(2^k)^{i_0-M_1}$. En relevant l'arc un nombre suffisant de fois, on trouve alors un w tel que $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ évolue entre w et $w/2^k$ sur $Y_1 \cup \dots \cup Y_{M(c)}$ et ait ses extrémités sur $\partial Y_{M(c)}$ (w dépend de c).

A priori, $M(c)$ dépend de c . Cependant on a le

Lemme. — *On peut borner $M(c)$ par une borne M indépendante de c .*

Démonstration. — En mettant un point de base fixe sur W_0 et un sur Y_1 , on sait (cf. XVI) que le morphisme entre cylindres marqués identifiés à \mathbb{C}/\mathbb{Z} défini par l'identification de W_0/f_c^k et Y_1/f_c^k admet quand c tend vers c_0 (dans la région du plan à laquelle nous nous sommes limités) un développement limité de la forme $G(c) = G_0 + k/\lambda + o(1) \pmod{\mathbb{Z}}$; $G(c)$ évolue dans une bande autour de \mathbb{R}^- .

Développons alors Y_1/f_c^k et W_0/f_c^k sur \mathbb{C} en envoyant les points marqués sur \mathbb{Z} . $\mathcal{R}(K_c, \theta)|_{[s/2^k, s]}$ et $\mathcal{R}(K_c, \theta)|_{[w/2^k, w]}$ se développent chacun en un arc de courbe

(compact), γ_s et γ_w où l'on convient de relever $W_{-M_1} \cup \dots \cup W_0$ et $Y_1 \cup \dots \cup Y_{M(c)}$ en relevant en 0 le point marqué de W_0 ou Y_1 .

$\mathcal{R}(K_c, \theta)|_{[s/2^k, s]}$ admet une position limite dans le plan quand c tend vers c_0 , donc aussi sur le cylindre; dès lors γ_1 admet une position limite dans \mathbb{C} , et reste donc, pour c assez proche de c_0 , dans un rectangle autour de 0.

γ_w s'obtient à partir de γ_s par une translation de $-G'$, où G' est un relèvement de $G(c)$.

Mais le développement limité ci-dessus prouve que la partie imaginaire de G , donc aussi de G' est bornée quand c tend vers c_0 : γ_w reste donc à hauteur bornée, donc dans une bande B limitée par deux horizontales.

Quand c tend vers c_0 , le bord de Y_1 admet une position limite sur le plan, donc aussi la courbe qu'elle définit sur le cylindre, uniformément sur tout compact; le relèvement de Y_1 dans \mathbb{C} restreint à la bande B admet donc une position limite; comme γ_w le rencontre, il reste en fait à distance bornée de 0, donc dans un rectangle de \mathbb{C} .

À la limite, un nombre borné de relèvements de domaines Y_i ($i \geq 1$) rencontre ce rectangle borné, donc $M(c)$ est borné. Cqfd.

Quitte à multiplier w par une puissance de 2^k pour certains c , on supposera que $\mathcal{R}(K_c, \theta)(w)$ et $\mathcal{R}(K_c, \theta)(w/2^k)$ sont sur ∂Y_M , et donc qu'entre ces deux valeurs du potentiel, $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ évolue dans $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$. Cet arc de rayon s'obtient par développement à extrémités sur ∂Y_M du lacet défini sur le cylindre par la première entrée du rayon, entre s et $s/2^k$.

On notera $\omega(c)$ le point critique de f_c^k variant continûment avec c et égal pour c_0 au point critique de $f_{c_0}^k$ situé dans la composante de $\overset{\circ}{K}_{c_0}$ adjacente à α_1 : il existe i_0 tel que $f_c^{i_0}(\omega) = 0$, avec $0 \leq i_0 < k$.

De plus il existe un n_0 tel que $f_c^{n_0}(\omega)$ soit dans Y_i pour c suffisamment proche de c_0 ; on peut enfin supposer, quitte à ne regarder que des c encore plus proches de c_0 , que pour $j < k(n_0 + 1)$ et $j \neq kn_0$, $f_c^j(\omega) \notin U$. On notera $\tilde{\omega}$ le point sur le cylindre correspondant à $(f_c^k)(\omega)$.

Proposition 6. — *c est sur $\mathcal{R}(M, 2^{i_0}\theta)$ si et seulement si le lacet injectif défini sur le cylindre par la « première entrée » de $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ dans U passe sur $\tilde{\omega}$.*

Démonstration

– Si le lacet défini sur le cylindre par la « première entrée » de $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ passe sur $\tilde{\omega}$, d'après ce qui précède, sur $[w/2^n, w]$, le lacet passe sur un point de U ayant pour projection sur le cylindre $\tilde{\omega}$ et situé dans un Y_i ($1 \leq i \leq M$) donc sur un $(f_c^k)^{n_0+i}(\omega)$ ($0 \leq i \leq M-1$): le raisonnement de XII montre qu'alors $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ passe aussi sur $f_c^k(\omega)$; dès lors $\mathcal{R}(K_c, 2^{i_0}\theta)$ passe sur c , donc c est sur $\mathcal{R}(M, 2^{i_0}\theta)$.

– Réciproquement si c est sur $\mathcal{R}(M, 2^{i_0}\theta)$, $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ passe sur $f_c^{2k}(\omega) = f_c^{k-i_0}(c)$ donc aussi sur tous les $f_c^{ki}(\omega) (i \geq 2)$ et le lacet défini sur le cylindre par la « première entrée » de $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ passe sur $\tilde{\omega}$. Cqfd.

Analysons alors ce qui se passe alors lorsqu'on n'est pas sur $\mathcal{R}(M, 2^{i_0}\theta)$: le lacet sur le cylindre est alors, puisqu'injectif, homotope dans le cylindre privé de $\tilde{\omega}$ à un parallèle situé soit d'un côté soit de l'autre de $\tilde{\omega}$; en revenant aux développements sur $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$, on voit que cela exprime que l'arc de lacet $\mathcal{R}(K_c, \theta)|_{[w/2^k, w]}$ peut être amené dans $Y_1 \dots Y_M \setminus \{(f_c^k)^{n_0+i}(\omega) (0 \leq i \leq M-1)\}$ sur α ou β en astreignant ses extrémités à glisser sur ∂Y_M , de sorte que l'une reste l'image de l'autre par f_c^k tout au long de l'homotopie.

Vu le cadre $(\theta \setminus \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{R}(M, 2^i\theta))$ où nous nous sommes placés pour énoncer les propositions 3 à 5, nous sommes hors de $\mathcal{R}(M, 2^{i_0}\theta)$ donc dans le cas analysé ci-dessus.

b) Retour dans U

Proposition 7. — *Il existe un $N \geq 1$ (indépendant de c) tel que, sur l'intervalle $[w/(2^k)^{N+1}, w/(2^k)^N]$, $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ soit dans $U^+(c)$.*

Remarque. — Cette proposition exprime que le rayon, qui après l'intervalle $[w/2^k, w]$ va bientôt franchir la courbe d'entrée et quitter la zone U garde un comportement contrôlable hors de U et revient sagement dans U^+ au bout d'un temps borné.

Démonstration

$\alpha)$ *Premières limitations sur l'emplacement du rayon.* — Pour un $n \geq 0$ fixé et tout i tel que $1 \leq i \leq M$, $(f_c^k)^{-n}(Y_i)$ a un nombre fini de composantes connexes, au plus 2^{kn} . Elles seront appelées « zones » par la suite.

Entre $w/(2^k)^n$ et $w/(2^k)^{n+1}$, $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ évolue alors sur les $2^{kn}M$ (au plus) zones ainsi définies.

Lemme 1. — *Il évolue en réalité sur seulement $M \cdot 2^M$ telles zones au plus, pour c assez proche de c_0 .*

(N.B : la condition de proximité dépend de n , mais ce ne sera pas gênant pour utiliser ce lemme).

Démonstration. — Comme plus haut prenons n_0 tel que $(f_c^k)^{n_0}(\omega) \in Y_1$, et supposons c assez proche de c_0 pour qu'aucun $(f_c^k)^i(\omega')$ pour $0 \leq i \leq n$ et ω' point critique de f_c^k hormis les $(f_c^k)^j(\omega) (n_0 \leq j \leq n_0 + M - 1)$ ne soit dans $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$.

Entre w et $w/2^k$, $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ évolue sur M zones.

Entre $w/2^k$ et $w/(2^k)^2$, il évolue *a priori* sur $2^k \cdot M$ zones au plus : les composantes connexes des images réciproques de $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$ par f_c^k ; mais (si $n_0 > 1$) $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$ ne contient pas de valeur critique de f_c^k : les 2^k images réciproques de $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$ sont donc disjointes deux à deux et puisque l'arc de rayon correspondant aux $t \in$

$[w/(2^k)^2, w/2^k]$ est connexe, il ne peut évoluer que dans une seule des déterminations de $(f_c^k)^{-1}(Y_1 \cup \dots \cup Y_M)$, donc sur M zones au plus.

Ainsi, chaque fois qu'on prend une image réciproque, on restera sur le même nombre de zones, sauf lorsque la région dont on prend l'image réciproque par f_c^k contient une valeur critique de f_c^k . Par les limitations imposées sur la position vis-à-vis de $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$ de l'orbite des points critiques, cela n'arrive que M fois exactement ; ces fois là, la région dont on prend l'image réciproque par f_c^k contient une valeur critique exactement, qui est $f_c^k(\omega)$. Ses images réciproques sont alors regroupées en $2^k - 1$ composantes connexes, formées en général de M zones, sauf celle de ω qui est formée de $2M - 1$ zones. En tout cas, cette opération fait au plus doubler le nombre de zones sur lesquelles évolue le rayon.

Finalement, pour les images réciproques n -èmes, on a bien la majoration annoncée (par $M \cdot 2^M$). Cqfd.

Le rayon, qui ne passe pas par $\tilde{\omega}$ quand on le regarde sur le cylindre, peut, comme nous l'avons remarqué, être ramené sur α ou β (en un sens précisé à la fin du a)). Nous allons voir que la seule connaissance de la position du rayon par rapport à $\tilde{\omega}$ sur le cylindre permet de déterminer 2^M branches (au plus) de $(f_c^k)^{-n}$ (certaines étant divalues) à appliquer à chacun des Y_i ($1 \leq i \leq M$) pour obtenir les $M \cdot 2^M$ (au plus) zones définies plus haut.

Soit en effet V la région simplement connexe que couvre le rayon quand on le déforme en α (ou β) sur $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$ sans rencontrer les points $(f_c^k)^j(\omega)$ ($n_0 \leq j \leq n_0 + M - 1$). $(f_c^k)^{-n}(V)$ a alors effectivement 2^{kn} composantes connexes, d'adhérences disjointes ; une seule contient α (resp. β) dans son adhérence. Celle-ci est alors contenue dans la région où évolue effectivement le rayon entre $w/(2^k)^n$ et $w/(2^k)^{n+1}$, car l'homotopie faisant glisser le rayon sur α (resp. β) peut à chaque étape être relevée en une homotopie qui fait glisser le rayon sur α (resp. β) dans $(f_c^k)^{-i}(Y_1 \cup \dots \cup Y_M)$ ($0 \leq i \leq n$). Les 2^M branches (au plus) de $(f_c^k)^{-n}$ à considérer sont ainsi celles qui envoient $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$ sur la composante connexe de $(f_c^k)^{-n}(Y_1 \cup \dots \cup Y_M)$ qui contient α (resp. β) dans son adhérence.

β) *Observations sur la dynamique de $z \mapsto (3z^2 + 1)/(z^2 + 3)$.* — Nous allons utiliser la conjugaison entre la dynamique de $f_{c_0}^k$ sur la composante connexe de $\overset{\circ}{K}_{c_0}$ adjacente à α_1 et $F : z \mapsto (3z^2 + 1)/(z^2 + 3)$ sur \mathbb{D} .

On notera \widehat{U}^- , \widehat{Y}_i (pour $i \geq 0$) les transformés de $U^-(c_0)$, $Y_i(c_0)$ par cette conjugaison ; \widehat{U}^+ sera le transformé de l'intersection de $U^+(c_0)$ avec la composante de $\overset{\circ}{K}_{c_0}$ adjacente à α_1 . Nous serons amenés à introduire une courbe γ dans D : γ sera définie sur \mathbb{R}^* et vérifiera :

- (a) $\text{Im } \gamma \geq 0$,
- (b) sur $[1, 2[$, $\gamma(t) = t/3 - 1/3$,
- (c) $\gamma(2t) = F[\gamma(t)]$.

Cette courbe γ est bien définie et unique : en effet (c) permet de la définir sur $[1, +\infty[$ où elle couvre alors le segment $[0, 1[$ de l'axe réel ; entre $1/2$ et 1 , la condition (c) laisse deux choix pour chaque valeur de $\gamma(t)$, mais (a) fixe alors cette valeur : ainsi sur cet intervalle γ parcourt le segment joignant $i/\sqrt{3}$ à 0 ; de même (c) et (a) permettent de déterminer sans ambiguïté γ sur chaque $[1/2^{n+1}, 1/2^n[$. La courbe ainsi obtenue est continue : elle l'est en effet sur chaque intervalle $[2^p, 2^{p+1}[$, $p \in \mathbb{Z}$ et par construction comme $\lim_{t \rightarrow 2^-} \gamma(t) = \gamma(2)$, on a aussi continuité aux points de la forme 2^p .

Lemme 2. — *Quand t tend vers zéro, $\gamma(t)$ tend vers 1 avec tangente verticale.*

Démonstration. — Il sera pratique de faire le changement de variables $w = (1+z)/(1-z)$. L'application $F : z \rightarrow (3z^2+1)/(z^2+z)$ de \mathbb{D} dans \mathbb{D} devient $F_1 : w \mapsto w + 1/w$ du demi-plan $\text{Re } w > 0$ dans lui-même. La courbe $\gamma(t)$ est transformée en une courbe $\eta(t)$ qui vérifie :

- (a) $\text{Im } \eta > 0$,
- (b) sur $[1, 2[$, $\eta(t) = t$,
- (c) $\eta(2t) = F_1[\eta(t)]$.

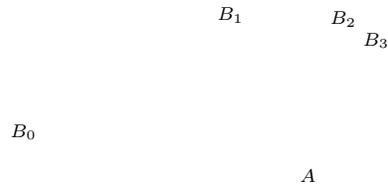
Il est plus pratique de regarder η' , paramétrée par le changement de variables $\eta'(u) = \eta(2^u)$: il faut donc montrer que quand $u \rightarrow -\infty$, $\eta'(u)$ tend vers l'infini dans la direction asymptotique $y'y$. Vu l'expression de F_1 , un point de $\text{Im } z > 0$ a pour antécédent dans $\text{Im } z > 0$ un point situé plus à gauche et plus haut ; dès lors pour $u \leq 1$, $\text{Re } \eta'(u) \leq 2$: la direction asymptotique sera assurée dès lors que $\text{Im}[\eta'(u)]$ tendra bien vers ∞ ; par ailleurs, on voit ainsi que si $\varphi_n(u) = \text{Im}[\eta'(u-n)]$, la suite $\varphi_n(u)$ est croissante pour chaque $u \in [0, 1]$. Mais pour $u \in [0, 1]$ fixé, la suite des $\eta'(u-n)$ a une limite (éventuellement infinie), puisque sa partie réelle décroît et sa partie imaginaire croît. Cette limite doit être un point fixe de F_1 , donc l'infini : dès lors la suite φ_n tend simplement vers l'infini, donc uniformément par le théorème de Dini, ce qui assure que $\eta'(u) \rightarrow \infty$ quand $u \rightarrow -\infty$. Cqfd.

La courbe γ délimite donc une zone A dans D . On notera B_0 le quart supérieur gauche de \mathbb{D} , et $B_{i+1} = [F^{-1}(B_i)] \cap (\text{Im } z > 0)$.

Lemme 3. — *Les B_i tendent vers 1 quand $i \rightarrow \infty$ (en ce sens que $\forall \varepsilon > 0, \exists i_0$ tel que $\forall i \geq i_0, \forall z \in B_i, |1-z| < \varepsilon$).*

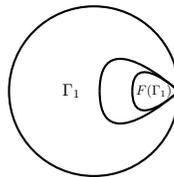
Démonstration. — Si ce n'était pas le cas, les B_i auraient un point d'accumulation a autre que 1 dans $\overline{\mathbb{D}}$. Ce point ne serait pas sur $\partial\mathbb{D}$: en effet, la monotonie de l'action de F sur $\partial\mathbb{D}$ garantit que tout point de $\partial\mathbb{D}$ finit par tomber sur ∂B_1 ; or toute image directe de a doit être aussi un point d'accumulation de la suite B_i .

a est donc dans \mathbb{D} , et son orbite est « piégée » dans $(\text{Im } z > 0) \setminus (B_0 \cup A)$. Mais le lemme 2 rend alors impossible que les $F^n(a)$ tendent vers 0 tangentiellement au rayon, d'où une contradiction, compte tenu de la proposition 2 de IX. Cqfd.



γ) *Choix de N .* — Nous allons maintenant appliquer ces considérations sur la dynamique de F pour obtenir des informations sur $F^{-n}(\widehat{Y}_1 \cup \dots \cup \widehat{Y}_M)$.

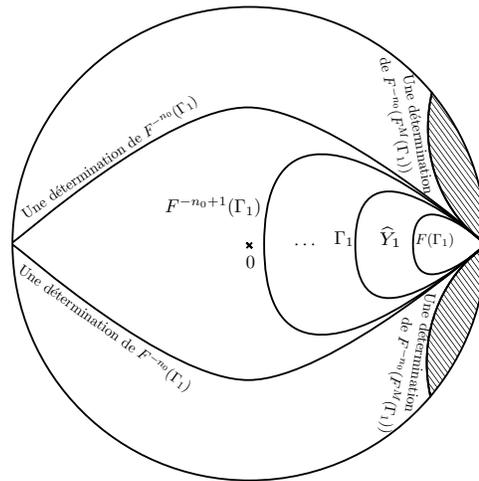
Regardons l'aspect de \widehat{Y}_1 : il est limité par deux courbes Γ_1 et $F(\Gamma_1)$ admettant des tangentes en 1, qui font l'angle $\pm\pi/4$ avec l'axe réel.



Quitte à grossir R , on peut les supposer incluses dans la région de l'adhérence de A et celle de la région conjuguée de A (il vaut mieux ne pas essayer de noter cela avec les notations usuelles!) transverses à l'axe réel en un seul point.

Motivés en cela par l'étude faite en α , on va s'intéresser seulement aux branches de F^{-n} qui envoient $\widehat{Y}_1 \cup \dots \cup \widehat{Y}_M$ dans une région qui contient 1 dans son adhérence.

Ces composantes connexes de $F^{-n}(\widehat{Y}_1 \cup \dots \cup \widehat{Y}_M)$ sont alors dans les régions limitées par le bord du disque et les deux déterminations de $F^{-n}(F^M(\Gamma_1))$ qui partent de 1 : (cf. zone hachurée dans le schéma ci-dessous).



Lemme 4. — Il existe N_0 tel que pour $N \geq N_0$, les deux composantes connexes de $F^{-n}(\hat{Y}_1 \cup \dots \cup \hat{Y}_M)$ qui contiennent 1 dans leur adhérence soient dans \hat{U}^+ .

Démonstration. — Il suffit bien évidemment de le montrer pour la composante connexe de $F^{-n}(\hat{Y}_1 \cup \dots \cup \hat{Y}_M)$ située au-dessus de l'axe réel. Celle-ci est dans la région limitée par le bord de \mathbb{D} et une courbe, détermination de $F^{-N}[F^M(\Gamma_1)]$.

La courbe Γ'_1 qui limite \hat{U}^+ est, elle, formée d'un arc dans A , qui coïncide avec Γ_1 au voisinage de 1, puis la quitte pour rejoindre $\partial\mathbb{D}$, délimitant ainsi une région (la « moitié » supérieure de \hat{U}^+) dans \mathbb{D} .

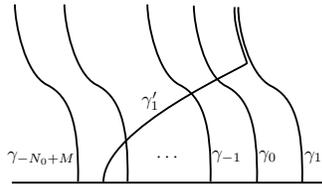
Il suffit donc de montrer que pour N assez grand, $F^{-N+M}(\Gamma_1)$ (où on prend la détermination de partie imaginaire positive issue de 1) est dans cette région.

On va distinguer $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap A)$ et $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap \bar{A})$ (ici \bar{A} désigne la conjuguée de A).

F restreint à A est bijectif : on peut donc conjuguer cette restriction de F à A à une transformation bijective g du demi-plan de Poincaré ; $F|_A$ a un point fixe indifférent sur ∂A : on peut donc choisir pour g la transformation parabolique $g(Z) = Z + 1$.

La courbe $\Gamma_1 \cap A$ est alors représentée dans ce modèle comme une courbe γ_1 joignant un point de l'axe réel à ∞ , avec une direction asymptotique $y'y$ (correspondant à la tangente à Γ_1 faisant un angle de $\pi/4$ avec l'axe réel), et $\Gamma'_1 \cap A$ est représentée comme une courbe γ'_1 coïncidant avec γ_1 au voisinage de l'infini et aboutissant en un point de l'axe réel plus à gauche que le bout de γ_1 ; la détermination de F^{-1} à appliquer à γ_1 pour trouver γ_{-N+M} (correspondant à $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap A)$) est $Z \rightarrow Z - 1$: il est clair que pour N assez grand, on est à gauche de γ'_1 , et donc $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap A)$ est dans \hat{U}^+ .

Pour $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap \bar{A})$, on va utiliser le lemme 3 : par l'hypothèse faite au début de cette partie γ de la démonstration sur la position de Γ_1 , $F^{-N+M}(\Gamma_1 \cap \bar{A})$ évolue



dans B_{N-n_0-M} (pour $N \geq n_0 + M$), donc est proche de 1 pour N assez grand, et est donc aussi dans \widehat{U}^+ . Cqfd.

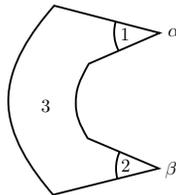
δ) *Un tel N convient.* — On va prendre un $N \geq N_0$ (avec en fait la condition supplémentaire $0, 3(N - M) \geq 2K$, dont la nécessité apparaîtra dans les calculs qui suivent), et vérifier qu'il répond à l'énoncé de la proposition 7.

Les branches de $(f_c^k)^{-N}$ qui, appliquées à Y_1, \dots, Y_M fournissent des régions dans lesquelles peut évoluer $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ entre $w/(2^k)^N$ et $w/(2^k)^{N+1}$ sont en nombre fini indépendant de c ; elles définissent ainsi un certain nombre de « zones » images de Y par itération de branches de $(f_c^k)^{-1}$. Pour $c = c_0$, on a prouvé en γ que ces zones sont toutes dans U^+ .

La plupart de ces régions (toutes sauf $2M$) ne contiennent pas α_1 dans leur adhérence (pour $c = c_0$) : elles sont alors relativement compactes dans $U^+(c_0)$ et restent incluses dans $U^+(c)$ pour c proche de c_0 dans θ .

Pour les $2M$ autres, il faut étudier avec un peu plus d'attention le comportement de f_c^k au voisinage de α ou β .

On va couper Y_1 en trois morceaux : deux sont limités par de petits arcs de cercles autour de α et de β ; le troisième est le reste de Y_1 .



Ce troisième morceau ne posera pas de problème : pour $c = c_0$, il ne contient pas α_1 dans son adhérence.

Regardons le morceau proche de α : dans le plan des Z , il correspond à un secteur proche de $-\infty$ du côté des $\text{Im } Z < 0$. Il est limité par une courbe qui reste à distance R' de zéro. Quitte à diminuer la taille des petits cercles divisant Y_1 en trois zones, on peut supposer R' aussi grand que nécessaire, et en particulier $R' > R$.

N étant choisi, pour R' choisi assez grand, la détermination de $(f_c^k)^{-1}$ à itérer i fois ($N - M + 1 \leq i \leq N$) et à appliquer à Y_1 pour fournir les M zones proches de α considérées s'écrit $Z = (1 + \frac{1}{A_\lambda})^{-1} Z' + 1$ à un terme d'erreur près, dont le module est majoré par $a/100$ (il suffit de prendre R' assez grand pour être sûr de

rester hors de \overline{D}_R pendant N itérations de ce $(f_c^k)^{-1}$. Pour R' choisi assez grand et c assez proche de c_0 la partie réelle est augmentée alors d'au moins 0,9 à chaque application de $(f_c^k)^{-1}$ et on est sûr de se retrouver en fin de compte après i itérations ($N - M + 1 \leq i \leq N$) dans $\text{Re } Z > 0, \text{Im } Z < 0$: le petit secteur autour de α dans Y_1 est bien envoyé dans $U^+(c)$ par $(f_c^k)^{-N-M+1} \dots (f_c^k)^{-N}$ pour c assez proche de c_0 .

Le calcul est un peu plus délicat près de β . Ici on utilise le fait que A'_λ , donc aussi la coupure faite entre A'_λ et iR , varie entre deux verticales $\text{Im } Z = -K$ et $\text{Im } Z = K$.

Pour $|Z - A| > A/2$, $(f_c^k)^{-1}$ est approchée par la similitude $Z : (1 + \frac{1}{A})^{-1}Z' + 1$ qui augmente la partie réelle d'au moins 0,4 dans la zone considérée, pour c assez proche de c_0 ; si on tient compte de l'erreur majorée par $a/100$ on est sûr que la partie réelle sera augmentée d'au moins 0,3. Ici on va utiliser la condition supplémentaire $0,3 \cdot (N - M) < 2K$. On choisit R' assez grand pour être sûr que les N itérations de $(f_c^k)^{-1}$ ne laissent pas dans le plan des Z entrer dans \overline{D}_R et continuent à augmenter la partie réelle d'au moins 0,3 ; dès lors on est sûr (pour c assez proche de c_0) qu'en i itérations ($N - M + 1 \leq i \leq N$) on est à droite de $\text{Im } Z = K$.

Pour $|Z - A| \leq A/2$, les inégalités de « Arriver au bon port » montrent que, $(f_c^k)^{-1}$ ressemble à la similitude de centre A' et de rapport $(1 + \frac{1}{A})^{-1}$ à $\frac{2a}{100|A|}|Z - A'_\lambda|$ près ; son itération i -ème ($N - M + 1 \leq i \leq N$) décale donc comme cette similitude à $\frac{2ai}{100|A|}|Z - A'_\lambda|$ près ; ce qui garantit qu'on a effectivement tourné et qu'on est « à droite » de la coupure entre A' et iR . Cqfd.

c) Construction d'un piège. — Pour c proche de c_0 , on a un $s(c)$ tel que $\mathcal{R}(K_c, \theta)(s)$ soit sur la courbe de sortie et qu'entre s et $s/2^k$, $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ évolue dans $U^+(c)$.

$\mathcal{R}(K_c, \theta)$ finit par rencontrer la courbe d'entrée pour un potentiel $w(c)$.

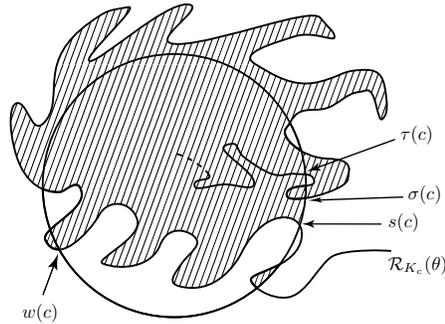
La proposition 8 montre alors que (pour c assez proche de c_0), il existe alors $t \leq w(c)$ tel que, sur $[t/2^k, t]$, $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ évolue de nouveau dans $U^+(c)$.

Posons $\tau(c) = \sup\{t \mid t \leq w \text{ et sur } [t/2^k, t], \mathcal{R}(K_c, \theta) \text{ évolue dans } U^+(c)\}$. Dès lors $\mathcal{R}(K_c, \theta)(\tau(c))$ est sur la courbe de sortie Γ .

Entre $\tau(c)$ et $w(c)$ il se peut que $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ rencontre Γ en un certain nombre de points ; j'appelle $\sigma(c)$ le paramètre compris entre $\tau(c)$ et $w(c)$ correspondant au point d'intersection de Γ et de $\mathcal{R}(K_c, \theta)|_{[\tau(c), w(c)]}$ le plus proche de $\mathcal{R}(K_c, \theta)[s(c)]$ (du même côté que $\mathcal{R}(K_c, \theta)[\tau(c)]$).

La zone piège P est alors définie comme l'ouvert limité par $\mathcal{R}(K_c, \theta)|_{[\sigma(c), s(c)]}$ et Γ entre $\mathcal{R}(K_c, \theta)[\sigma(c)]$ et $\mathcal{R}(K_c, \theta)[s(c)]$.

Remarquons que pour c assez proche de c_0 , \overline{P} ne contient aucune des valeurs critiques de f_c^k : en effet en ce qui concerne les $f_c^k(\omega')$ pour des ω' distincts de $\omega(c)$, lorsque $c = c_0$, ils ne sont pas dans la région couverte par les images des $2 \cdot 2^M \cdot M$ branches de $(f_{c_0}^k)^{-i}$ (pour $N - M + 1 \leq i \leq N$) dont l'application à Y_1 fournit la région où peut évoluer entre $1/(2^k)^N$ et $1/(2^k)^{N+1}$ une courbe continue γ vérifiant $\gamma(2t) = f_{c_0}^k(\gamma(t))$ et évoluant dans $Y_1 \cup \dots \cup Y_M$ entre 1 et 2^k ; ils n'y sont donc



toujours pas pour c voisin de c_0 . Ils ne sont pas non plus dans $U(c)$ pour c proche de c_0 , donc ne sont pas dans \overline{P} .

Le même raisonnement montre que les ω'' distincts de ω tels que $f_c^k(\omega'') = f_c^k(\omega)$ ne sont pas non plus dans \overline{P} .

De plus, on dispose d'une détermination continue de $(f_c^k)^{-1}$ sur ∂P (égale à $\mathcal{R}(K_c, \theta)(u) \mapsto \mathcal{R}(K_c, \theta)(u/2^k)$ sur la partie de P formée d'un arc du rayon $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ et par la détermination de $(f_c^k)^{-1}$ qui envoie W_0 sur W_{-1} sur la partie de ∂P formée d'un arc de Γ), qui envoie ∂P sur une courbe fermée simple $\partial P'$ incluse dans P' .

Si $f_c^k(\omega)$ était dans \overline{P} , un de ses antécédents devrait être dans \overline{P}' . Puisqu'aucun des $\omega'' \neq \omega$ tels que $f_c^k(\omega'') = f_c^k(\omega)$ n'y est, ce serait forcément ω . Mais on a alors une absurdité, car si $\omega \in P'$, f_c^k enverrait P' , courbe fermée simple, enserrant un seul point critique sur une courbe fermée simple, et si ω était sur $\partial P'$, il serait sur $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ donc c serait sur $\mathcal{R}(M, 2^{i_0}\theta)$, ce qu'on a exclu.

La détermination continue de $(f_c^k)^{-1}$ qui envoie ∂P sur $\partial P'$ se prolonge alors en une branche holomorphe univaluée de $(f_c^k)^{-1}$ qui envoie P dans lui-même.

Remarquons enfin, ce qui sera utile par la suite, que pour $m \geq 0$ fixé, si on prend c assez proche de c_0 (la condition de proximité dépend de m), on est assuré par le même raisonnement qu'aucun des $(f_c^k)^i(\omega')$ pour ω' point critique de f_c^k distinct de ω et $1 \leq i \leq m$, non plus que les $\omega'' \neq \omega$ tels que $(f_c^k)^m(\omega'') = (f_c^k)^m(\omega)$ ne sont dans \overline{P} ; comme $f_c^k(\omega)$ n'est pas dans \overline{P} et que tout point de \overline{P} a un antécédent dans \overline{P} , on en déduit que les $(f_c^k)^i(\omega)$ ($1 \leq i \leq m$) n'y sont pas non plus. En termes de f_c , cela signifie que les $f_c^i(0)$ ne sont pas dans \overline{P} pour $1 \leq i \leq km$.

Nous avons alors le matériel pour démontrer les trois propositions annoncées :

Démonstration de la proposition 3. — Pour $t \leq \sigma(c)$, $\mathcal{R}(K_c, \theta)(t)$ évolue dans P : en effet, on voit par récurrence sur $n \geq -1$ que la branche de $(f_c^k)^{-1}$ à choisir pour passer de $\mathcal{R}(K_c, \theta)_{[\sigma(c)/(2^k)^{n+1}, \sigma(c)/(2^k)^n]}$ à $\mathcal{R}(K_c, \theta)_{[\sigma(c)/(2^k)^{n+2}, \sigma(c)/(2^k)^{n+1}]}$ envoie $\mathcal{R}(K_c, \theta)_{[\sigma(c)/(2^k)^n]}$, qui est dans \overline{P} , sur $\mathcal{R}(K_c, \theta)_{[-\sigma(c)/(2^k)^{n+1}]}$ qui est aussi dans \overline{P} et est donc la branche qui envoie \overline{P} dans lui-même.

$(f_c^k)^{-1}$, de degré 1 d'un ouvert de \mathbb{C} dans un ouvert strictement contenu dans le premier est strictement contractante pour la métrique de Poincaré de P ; elle a un

point fixe qui est α ou β (selon la position sur le cylindre du lacet correspondant à la première entrée du rayon) : la suite des $(f_c^k)^{-n}(u)$ converge donc vers α ou β . Cqfd.

Démonstration de la proposition 4. — On a remarqué que \overline{P} ne contient aucun des $f_c^i(0)$ ($1 \leq i \leq km$) pour c assez proche de c_0 ; comme $\mathcal{R}(K_c, \theta)_{|[s(c)/2^k, +\infty[}$ est continu en c , il ne passe pour c proche de c_0 sur aucun des $f_c^i(0)$ ($1 \leq i \leq km$) et $\mathcal{R}(K_c, \theta)_{|[0, s(c)/2]}$ non plus, puisqu'il est inclus dans \overline{P} . Cqfd.

Démonstration du complément 2 au théorème 1 de XIII. — Nous savons déjà (XIII, Complément 1 au lemme 1) que si le complément 2 n'était pas exact, ce serait qu'un rayon externe de M dont l'argument est à dénominateur pair θ_1 aboutit sur une racine c_0 de composante hyperbolique. Considérons n tel que $2^n \theta_1$ soit à dénominateur impair. Il existe alors des c arbitrairement proches de c_0 tels que $c \in \mathcal{R}(M, \theta_1)$ donc $c \in \mathcal{R}(K_c, \theta_1)$ et donc $f_c^n(c) = f_c^{n+1}(0) \in \mathcal{R}(K_c, 2^n \theta_1)$.

— Si $R_{K_{c_0}}(2^n \theta_1)$ aboutit sur un point d'un cycle répulsif, $\overline{\mathcal{R}}(K_c, \theta_1)$ varie continûment comme fonction de c au voisinage de c_0 , donc $\overline{\mathcal{R}}(K_{c_0}, \theta_1)$ passe sur c_0 , ce qui est absurde puisque $c_0 \in \overset{\circ}{K}_{c_0}$.

— Si $R_{K_{c_0}}(2^n \theta_1)$ aboutit sur un point du cycle indifférent rationnel, on peut (quitte à modifier n) supposer que c'est sur α_1 . Mais alors le fait que l'on puisse trouver c arbitrairement proche de c_0 tel que $f_c^{n+1}(0) \in \mathcal{R}(K_c, 2^n \theta_1)$ contredit la proposition 4. Cqfd.

Démonstration de la proposition 5. — La position du rayon par rapport aux $f_c^i(0)$ ($1 \leq i \leq km$) ne change pas, à condition que c soit assez proche de c_0 . Pour donner un sens précis à cette remarque, compactifions \mathbb{C} par un point à l'infini dans chaque direction de demi-droites et prolongeons les $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ en prenant pour $\mathcal{R}(K_c, \theta)(\infty)$ le point à l'infini dans la direction θ : le rayon est alors continu sur $[0, \infty]$.

Dans l'espace $\widehat{\mathbb{C}}$ ainsi construit, pour c assez proche de c_0 et pas sur $\mathcal{R}(M, 2^{i_0} \theta)$, le rayon $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ est homotope à extrémités fixes à une courbe η_c égale à $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ sur $[s(c), +\infty]$ et à un segment de droite entre α ou β et $\mathcal{R}(K_c, \theta)[s(c)]$, sans passer sur les $f_c^i(0)$ ($1 \leq i \leq km$).

Ainsi $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ n'est pas continu en fonction de c , mais est homotope à η_c , qui, elle, est continue en c . L'extrémité de $\mathcal{R}(K_c, \theta_1)$ pour $2^n \theta_1 = \theta$ (avec $n \leq km$) est alors égale à l'extrémité de la détermination de $(f_c)^{-n}(\eta_c)$ qui envoie le point à l'infini dans la direction θ sur le point à l'infini dans la direction θ_1 .

Le même raisonnement que dans le cas des points de Misurewicz, compte tenu du fait que l'homotopie se passe à chaque étape dans l'espace F défini alors, montre que cette extrémité est une fonction continue de c . Cqfd.

Remarque. — Lorsque $q \neq 1$, on a $2q$ cylindres et non plus deux. On peut cependant reprendre le même raisonnement à partir de l'entrée du rayon dans l'un des cylindres, et limiter sa distorsion. Si on est du côté de β_1 , alors le raisonnement fait dans le cas

$q = 1$ montre qu'en un temps borné, on revient dans la zone définissant le premier cylindre, et on peut construire le même piège autour de β_1 qu'on avait construit dans le cas $q = 1$.

Si on est du côté du bout en α sur le cylindre, après avoir traversé la zone correspondant à un premier cylindre, on tombera en un temps fini sur un deuxième. Mais on sera là encore du côté du bout en α : pour c assez proche de c_0 , le rayon évolue en effet dans un pétale de K_{c_0} pendant son éventuel passage hors des zones fournissant les cylindres : on traverse ainsi un deuxième cylindre, avec de nouveau des limitations sur la distorsion du rayon pendant cette traversée. Après avoir traversé les $2q$ zones fournissant des cylindres, le rayon revient dans celle où il avait fait sa première entrée, et un piège se referme autour de α .

EXPOSÉ XVIII

COMPLÉMENTS SUR LES ARBRES

PIERRE LAVAURS

1. Arbres aux centres et aux racines

Soit W une composante hyperbolique de $\overset{\circ}{M}$ de multiplicité μ , et $c_1 \dots c_\mu$ ses racines.⁽¹⁾ Pour tout point $c \in W$ et $\theta \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, le rayon $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ aboutit en un point $\gamma_c(\theta) \in K_c$: on peut donc définir une relation d'équivalence \sim_c sur \mathbb{Q}/\mathbb{Z} par $\theta \sim_c \theta' \Leftrightarrow \gamma_c(\theta) = \gamma_c(\theta')$.

Proposition 1. — \sim_c est constante sur $W \cup \{c_1, \dots, c_\mu\}$.

Démonstration

Constance sur W . — Pour θ et θ' fixés, l'ensemble des $c \in W$ tels que $\gamma_c = \gamma_c(\theta')$ est fermé dans W puisque ces deux fonctions sont continues en c (cf. théorème de XVII (en fait, sur W , on est dans le cas « facile » de ce théorème)).

Soit $c_0 \in W$ fixé; pour c proche de c_0 les fonctions $c \mapsto \gamma_c(\theta)$ et $c \mapsto \gamma_c(\theta')$ fournissent deux points prépériodiques, variant continûment en c , et envoyés par un nombre d'itérations n constant, sans passer par 0 sur un cycle de longueur divisant constamment un entier p fixe. Ces deux fonctions vérifient donc toutes deux l'équation fonctionnelle $f_c^{n+p}(\alpha(c)) = f_c^p(\alpha(c))$.

Si on suppose $\theta \sim_{c_0} \theta'$, le théorème des fonctions implicites assure alors l'égalité de $\gamma_c(\theta)$ et $\gamma_c(\theta')$ pour c proche de c_0 : l'ensemble des c tels que $\theta \sim_c \theta'$ est donc aussi ouvert dans W .

Pour tout couple (θ, θ') , $\theta \sim_c \theta'$ est donc vrai soit pour tout $c \in W$, soit pour aucun.

Conservation aux racines. — Il est encore vrai, pour les mêmes raisons, que pour θ et θ' fixés, l'ensemble des $c \in W \cup \{c_1, \dots, c_\mu\}$ tels que $\gamma_c(\theta) = \gamma_c(\theta')$ est fermé dans $W \cup \{c_1, \dots, c_\mu\}$: la relation d'équivalence est donc plus grossière en une racine que dans W .

Prenons θ et θ' équivalents en c_1 par exemple.

⁽¹⁾Nous verrons plus tard qu'il n'y a qu'une seule racine, mais nous ne le savons pas encore.

Si $\gamma_{c_1}(\theta) = \gamma_{c_1}(\theta')$ est prépériodique répulsif, le raisonnement fait sur W peut-être repris sans modification, et on voit que θ et θ' sont encore équivalents au voisinage de c_1 , donc dans W .

Si $\gamma_{c_1}(\theta) = \gamma_{c_1}(\theta')$ est prépériodique indifférent, il faut analyser plus précisément les cycles qui « fusionnent » en c_0 pour fournir le cycle indifférent. Cette analyse a été réalisée au début de XVI; elle montre que si $\alpha(c_1)$ est sur le cycle indifférent rationnel de f_{c_1} , il y a $q + 1$ façons de définir $\alpha(c)$ continue au voisinage de c_1 dans W qui soit un point périodique de f_c (l'une est de période kq , les q autres de période k). Parmi ces $q + 1$ déterminations, q sont attractives dans W donc en fait une seule peut recevoir des rayons. Si $\gamma_{c_1}(\theta) = \gamma_{c_1}(\theta')$ est sur le cycle indifférent rationnel, la continuité de $\gamma_c(\theta)$ ou $\gamma_c(\theta')$ en c implique alors que pour c proche de c_0 , on ait encore $\theta \sim_c \theta'$; si $\gamma_{c_1}(\theta) = \gamma_{c_1}(\theta')$ est prépériodique indifférent rationnel, il existe n tel que $\gamma_{c_1}(2^n\theta)$ soit indifférent rationnel: comme $\gamma_c(\theta)$ et $\gamma_c(\theta')$ vérifient alors tous deux l'équation fonctionnelle $f_c^n(\gamma_c(\theta)) = f_c^n(\gamma_c(\theta')) = \gamma_c(2^n\theta)$, ce sont les mêmes branches de $f_c^{-n}(\gamma_c(\theta))$ et ils sont donc égaux pour c assez proche de c_1 dans W . Cqfd.

Proposition 2. — Soient c et c' centres ou racines de composantes hyperboliques; si $\sim_c = \sim_{c'}$, H_c et $H_{c'}$ ⁽²⁾ sont isomorphes.

Démonstration. — Nous associons à c centre ou racine de composante hyperbolique un sous-ensemble (fini) Θ_c de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} composé :

- des arguments externes des points de branchement de l'arbre de Hubbard de f_c
- des arguments externes des points de $\partial U_0, \dots, \partial U_{n-1}$ (où U_0, \dots, U_{n-1} sont les composantes du cycle f_c périodique pour f_c) qui forment un cycle de longueur n
- des arguments externes des points d'argument interne opposé aux précédents de $\partial U_0, \dots, \partial U_{n-1}$.

Considérons $\Theta_c \cup \Theta_{c'}$: la restriction de \sim à cet ensemble est la même pour c et c' . Les rayons externes ayant ces arguments dessinent donc le « même » motif dans le plan (au sens de l'existence d'un homéomorphisme du plan conservant les directions à l'infini) pour K_c et $K_{c'}$. Ce motif divise le plan en un certain nombre de zones.

Lemme. — Pour tout $i \geq 0$, $f^i(0)$ est dans la même zone pour c et pour c' .

Démonstration. — On va montrer que pour $\theta, \theta' \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ équivalents pour $\sim_c = \sim_{c'}$ et distincts, on sait placer $f^i(0)$ par rapport à la courbe allant de ∞ à ∞ par $\overline{\mathcal{R}}(K_c, \theta) \cup \overline{\mathcal{R}}(K_{c'}, \theta')$ ou $\overline{\mathcal{R}}(K_{c'}, \theta) \cup \overline{\mathcal{R}}(K_c, \theta')$

Pour $i = 0$, c'est évident: K_c (ou $K_{c'}$) étant symétrique par rapport à 0, 0 est du côté qui laisse le plus grand arc entre θ et θ' sur le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} .

On va ensuite faire une récurrence sur i : $\mathcal{R}(K_c, \theta)$ et $\mathcal{R}(K_{c'}, \theta')$ n'aboutissent pas en zéro, donc $\theta \neq \theta' + 1/2$: θ et θ' ont au total quatre « moitiés », $\theta/2, \theta'/2, \theta/2 + 1/2$ et $\theta'/2 + 1/2$. Les rayons indexés par celles-ci se regroupent sur K_c en deux points

⁽²⁾ H_c et $H_{c'}$ sont les arbres de Hubbard pour f_c et $f_{c'}$.

Exemples

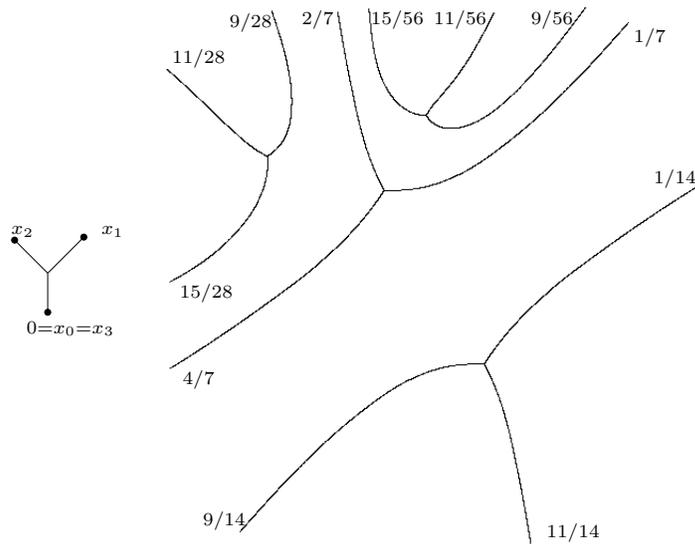


FIGURE 1. c aboutissement du rayon externe de M d'argument $1/7$

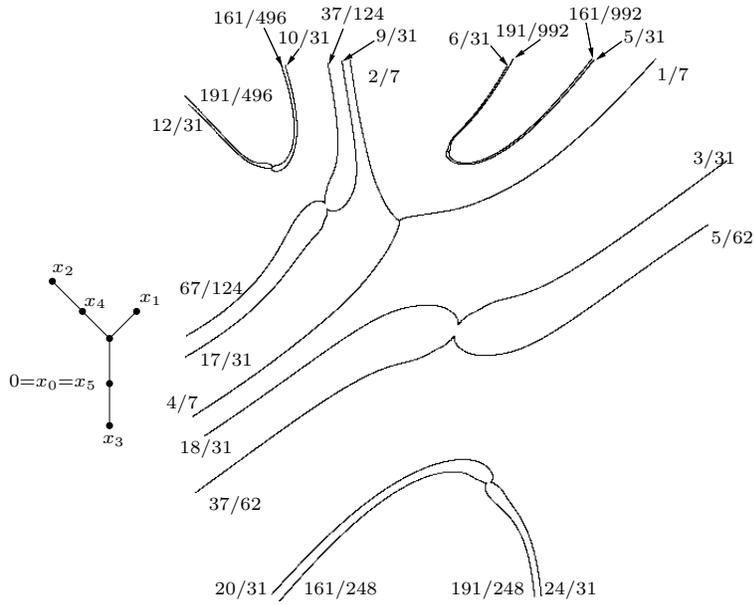


FIGURE 2. c aboutissement de rayon externe de M d'argument $5/31$

envoyés par f_c sur l'aboutissement de $\mathcal{R}(K_c, \theta)$. Puisque $\sim_c = \sim_{c'}$, les rayons pour $K_{c'}$ se regroupent deux à deux de la même manière, divisant ainsi le plan en trois zones; par l'hypothèse de récurrence on sait placer $f^i(0)$ par rapport à ces trois zones; on en déduit alors le placement de $f^{i+1}(0)$ par rapport à $\overline{\mathcal{R}}(K, \theta) \cup \overline{\mathcal{R}}(K, \theta')$, qui est donc le même pour c et pour c' . Cqfd.

On va alors déduire du lemme que H est le même en c et c' . Remarquons pour cela que :

- il y a au plus un point marqué de H_c (ou de $H_{c'}$ puisque le lemme a montré qu'ils sont placés de la même façon) par zone : c'est dans ce but que l'on a mis dans Θ_c des rayons aboutissant en deux points de chacune des composantes du cycle de composantes de $\overset{\circ}{K}_c$
- les points de branchement de H_c ou $H_{c'}$ sont tous des points où se regroupent 3 zones au moins des motifs formés par celles-ci.

Dès lors, il n'y a qu'une manière, du point de vue de la topologie et de l'isotopie du plongement dans \mathbb{C} de joindre les divers points marqués : sur la frontière de chaque zone, formée d'une ou deux courbes on met un point de sortie par courbe, et l'arbre doit passer par ces points de sortie pour joindre les points marqués. Cqfd.

2. Arbre en une bifurcation

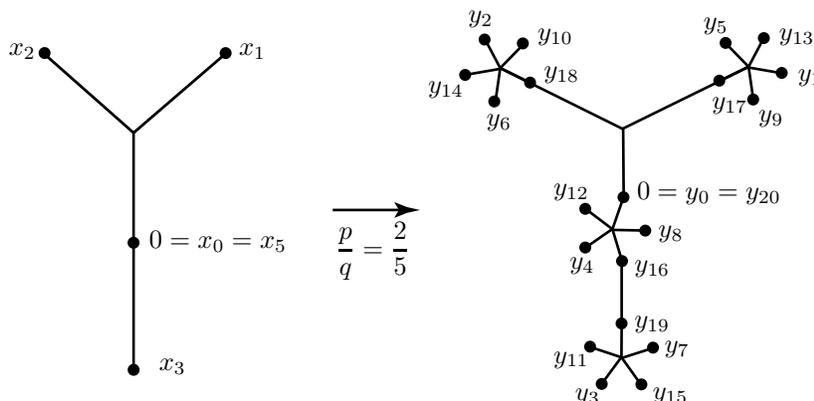
Soit W une composante hyperbolique de $\overset{\circ}{M}$, $\rho(c)$ la valeur propre pour f_c du cycle qui est attractif dans W . Nous allons décrire comment obtenir l'arbre H' d'un point c de ∂W où $\rho(c) = e^{2i\pi p/q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$, $q \neq 1$ (le cas $q = 1$ a été traité au 1), en fonction de l'arbre de Hubbard H aux centres de W . Nous dirons que H' est obtenu à partir de H par *bifurcation* d'argument $e^{2i\pi p/q}$. (Pour parler rigoureusement, c'est bien sûr la classe d'isomorphisme de l'arbre que nous construisons).

Description de la construction. — Soient $(x_i)_{0 \leq i \leq k-1}$ les points marqués de H . Remplaçons chacun des x_i par une petite étoile à q branches, de centre x_i , d'extrémités $(y_j)_{j=i+\ell k}$ $0 \leq \ell \leq q-1$, numérotés de façon que la rotation de p/q tour autour de x_i applique y_j sur $y_{j+k} \pmod{kq}$. On a ainsi des points y_0, \dots, y_{kq-1} .

Quand un brin de H arrive en un point x_i , on le fait arriver en l'un des y_j avec $j \equiv i \pmod{k}$. Il y a une manière unique de faire cela de façon que l'arbre H' obtenu, muni des y_i , satisfasse à la condition de Hubbard : $\exists F : H' \rightarrow H'$, continue injective sur chacune des composantes de H' coupé en y_0 , avec $F(y_i) = y_{i+1}$, $F(y_{kq-1}) = y_0$.

Justification de la construction. — Soit c_1 un centre de U , et considérons Θ_{c_1} défini comme au début de la preuve de la proposition 2. Le raisonnement de la proposition 1 montre immédiatement que le graphe de \sim_c contient celui de \sim_{c_1} ; de surcroît les points d'aboutissement des rayons indexés par Θ_c aboutissent dans K_{c_1} sur des points périodiques répulsifs ou prépériodiques répulsifs sans être sur l'orbite inverse de zéro,

Exemple



donc qui ne « fusionnent » pas : comme en une racine, nous voyons donc que ces rayons dessinent le « même motif » dans le plan de K_{c_1} et celui de K_c (ici, on n'a utiliser que le cas « facile » de XVII). Le lemme de la proposition 2 peut alors être appliqué : on sait placer les $(y_i)_{0 \leq i \leq kq-1}$ par rapport aux rayons de Θ_c . L'arbre H' s'obtient donc en remplaçant dans l'arbre H le point $(x_i)_{0 \leq i \leq k-1}$ par le sous-arbre engendré par les $(y_j)_{j=i+\ell k}$ ($0 \leq \ell \leq q-1$). Or ce sous-arbre est associé aux q composantes adjacentes à un point périodique de période k : c'est donc bien l'étoile à q branches décrite.

H' , isomorphe à l'arbre de Hubbard pour un c racine de composante hyperbolique vérifie la condition de Hubbard.

Il reste à vérifier que cette construction n'est pas ambiguë, c'est-à-dire qu'il y a bien une manière unique de placer les étoiles sur H . Mais, δ désignant le degré, la condition de Hubbard entraîne aisément (cf. IV, Prop. 4),

$$\delta(y_0) = 2, \quad \delta(y_1) = 1 \leq \delta(y_2) \leq \dots \leq \delta(y_{kq-1}) \leq 2 = \delta(y_{kq})$$

(en posant $y_{kq} = y_0$) ; en x_1 , il sera donc nécessaire d'attacher l'étoile à H par son sommet ayant le plus grand indice.

Enfin l'injectivité de F sur les deux composantes de H' coupé en y_0 permet de déterminer comment les étoiles sont envoyées les unes vers les autres (le chemin partant vers l'étoile contenant y_0 étant envoyé sur le chemin partant vers l'étoile contenant y_1), donc de compléter la numérotation des points $(y_i)_{0 \leq i \leq kq-1}$ sur les étoiles. Cqfd.

3. Calcul des arguments externes dans M

Soient c_1 une racine d'une composante hyperbolique W de $\overset{\circ}{M}$ et H son arbre de Hubbard. Nous allons montrer comment on obtient ses arguments externes dans M au vu de l'arbre H . Soient $x_0 = 0, x_1 = c \dots x_k = x_0$ les points marqués de H (où k est la période de x_0). Choisissons une application $F : H_c \rightarrow H_c$ continue, telle que

$F(x_i) = x_{i+1}$, injective sur chaque composante de H_c coupé en 0. On suppose qu'on a choisi F de façon qu'elle ait un point périodique α_1 à l'intérieur de l'arête qui mène à x_1 (rappelons que x_1 est une extrémité de H_c). La période de α_1 est alors k . Les arguments $\theta_- = \arg_-(c)$ et $\theta_+ = \arg_+(c)$ sont alors les deux arguments de α_1 , calculés suivant l'algorithme décrit en VII, §4 (qui n'utilise que les données combinatoires).

Variante. — On peut (comme dans la note CRAS de janvier 82) mettre α_1 en x_1 , mais on met seulement un bourgeon aux points extrémaux de H_c (au lieu d'une infinité), et on choisit la dynamique sur les accès aux x_i (qui n'est pas déterminée pour $x_0 \mapsto x_1$) de façon que ces accès soient périodiques de période k .

Montrons que cet algorithme convient : il est bien évident que le résultat ne dépend pas de la position du point α_1 sur l'arête qui mène à x_1 ni du F choisi ; le point périodique indifférent rationnel est dans l'arbre H_c justement sur l'arête en question, éventuellement en son origine a (cf. XIV, Prop. 4) ; s'il est strictement sur l'arête le calcul fait ci-dessus donne tous ses arguments externes dans K_c qui sont donc deux : on est dans le cas $q = 1$ (racine primitive) et on a bien trouvé les arguments externes de c dans M ; s'il est en a , le calcul donne le même résultat que celui qu'on aurait en considérant les accès en a limitrophes à l'arête $[a, x_1]$, c'est-à-dire encore précisément les arguments externes de c dans M .

De cet algorithme et celui décrit au 2 on peut déduire un algorithme arithmétique pour donner les arguments $\theta_{p/q}^-$ et $\theta_{p/q}^+$ dans M d'un point c de ∂W obtenu par bifurcation d'argument $e^{2i\pi p/q}$ en fonction des arguments externes θ^- et θ^+ dans M du point c_1 .

Si $c_1 = 1/4$, l'arbre de Hubbard de f_c est une étoile à q branches indexées de sorte qu'on passe du point y_i au point $y_{i+\ell}$ par rotation de p/q tour : on peut à l'aide de l'algorithme ci-dessus calculer les arguments externes de c dans M ; on notera leurs représentants dans $]0, 1[$ $f^-(p/q)$ et $f^+(p/q)$ avec $f^-(p/q) < f^+(p/q)$: ainsi $f^-(1/2) = 1/3$, $f^+(1/2) = 1/3$, $f^-(1/3) = 1/7$, $f^+(1/3) = 2/7, \dots$ $\dot{\theta}^-$ et $\dot{\theta}^+$ désignent les représentants de θ^- et θ^+ dans $]0, 1[$ et on suppose $\dot{\theta}^- < \dot{\theta}^+$.

Proposition 3. — Les représentants de $\theta_{p/q}^-$ et $\theta_{p/q}^+$ dans $]0, 1[$ s'obtiennent de la manière suivante : on écrit

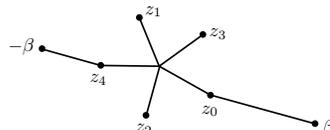
$$\begin{aligned} \dot{\theta}^- &= \overbrace{.u_1^- \dots u_k^-} && \text{en base 2} \\ \dot{\theta}^+ &= \overbrace{.u_1^+ \dots u_k^+} && \text{en base 2} \end{aligned}$$

puis, dans le développement dyadique de $f^-(p/q)$ (resp. $f^+(p/q)$) en base 2, on remplace les 0 par des $u_1^- \dots u_k^-$ et les 1 par des $u_1^+ \dots u_k^+$.

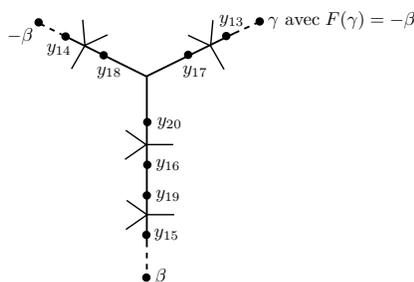
Démonstration. — Il suffit d'expliciter ce qui se produit lorsqu'on applique l'algorithme de 3. pour trouver l'arbre associé à c puis celui de la première partie de ce paragraphe pour calculer les arguments associés.

En effet on peut vérifier que dans l'étoile complétée au sens de VII, l'arc $[-\beta, \beta]$ passe par z_{q-1} et z_0 :

(on note z_0 le point critique pour cet arbre, z_{i+1} est l'image de z_i pour sa dynamique).



Dans l'arbre en c , les images réciproques de $[-\beta, \beta]$ passent dans les étoiles en $y_{(\ell-2)q+\ell}$ et $y_{(k-1)q+\ell}$ ($1 \leq \ell \leq k$).



Dès lors, si on prend un point α_1 sur l'arête menant en y_1 , un accès à α_1 évoluera pendant les k premières itérations comme un accès à x_1 « à droite » quand on va vers x_1 sur H_{c_1} si y_1 est « à droite » de l'arc de y_{kq-1} à y_{kq-q-1} , c'est-à-dire si z est « à droite » du chemin de z_0 à z_{q-1} , c'est-à-dire si $f(p/q)$ (ou $f^+(p/q)$ selon le bourgeon en α_1 considéré) commence par un 0, comme un accès à x_1 « à gauche » si $f^-(p/q)$ commence par un 1 : on remplace bien le premier chiffre de $f^-(p/q)$ par $\overbrace{u_1^- \dots u_k^-}$ si c'est un zéro et par $\overbrace{u_1^+ \dots u_k^+}$ si c'est un 1.

On voit aisément que c'est de nouveau ce qu'il faut faire pour chaque série de k itérations. Cqfd.

Proposition 4. — Si $c_1 \neq 1/4$, alors 0 et W sont de part et d'autre de la courbe $L = \mathcal{R}(M, \theta_+) \cup \mathcal{R}(M, \theta_-) \cup \{c_1\}$.

Démonstration. — En effet 0 et W sont placés par rapport à L comme $1/4$ par rapport à un point c obtenu à partir de c_1 par bifurcation d'argument $1/2$. L'algorithme de la Proposition 3 montre que si $\dot{\theta}_{1/2}^-$ et $\dot{\theta}_{1/2}^+$ sont les représentants dans $]0, 1[$ de $\theta_{1/2}^-$ et $\theta_{1/2}^+$, on a $0 < \dot{\theta}^- < \dot{\theta}_{1/2}^- < \dot{\theta}_{1/2}^+ < \dot{\theta}^+ < 1$, donc L sépare bien c de $1/4$, aboutissement de $\mathcal{R}(M, 0)$. Cqfd.

EXPOSÉ XIX

SIMPLICITÉ DES COMPOSANTES HYPERBOLIQUES

Théorème 1. — Pour toute composante hyperbolique W de $\overset{\circ}{M}$, l'application $\rho_W : W \rightarrow \mathbb{D}$ est un isomorphisme.

On peut donner de ce théorème plusieurs démonstration. En voici les plans :

Première démonstration

Lemme 2 (Gleason). — Toute racine de P_k est simple.

(P_k est défini en XIV-6).

Démonstration. — Notons A l'anneau des $z \in \mathbb{C}$ qui sont entiers algébriques sur \mathbb{Z} . Le polynôme P_k est monique, donc si $P_k(c) = 0$ on a $c \in A$. Mais $P_k(2) = (P_{k-1}(2))^2 + 2$, d'où $P'_k = 2P_{k-1}P'_{k-1} + 1$, et si c est racine de P_k , on a $P'_k(c) \equiv 1 \pmod{2A}$, donc $P'_k(c) \neq 0$. Cqfd.

Démonstration du théorème 1. — Une composante W a un seul centre d'après XVIII, Proposition 1 et Posdronasvili (VI). Ce centre est simple d'après le lemme 2. Cqfd.

Deuxième démonstration. — À partir de la proposition 4 de XVIII, on démontre :

Proposition 6. — Soient W_1 et W_2 deux composantes hyperboliques, c_1 une racine de W_1 et c_2 une racine de W_2 . Si $c_1 \neq c_2$, on a $\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 = \emptyset$, $\{c_1\}$ ou $\{c_2\}$.

Démonstration. — Pour $i = 1, 2$, c_i reçoit deux rayons $\mathcal{R}(M, \theta_i^+)$ et $\mathcal{R}(M, \theta_i^-)$. On pose

$$L_i = \mathcal{R}(M, \theta_i^+) \cup \mathcal{R}(M, \theta_i^-) \cup \{c_i\}.$$

On a $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, donc $\mathbb{C} \setminus L_1 \cup L_2$ a 3 composantes connexes U_1, U_2, U_3 avec

$$\partial U_1 = L_1, \quad \partial U_2 = L_1 \cup L_2, \quad \partial U_3 = L_2.$$

Si $0 \in U_1$ on a $\overline{W}_2 \subset U_3 \cup \{c_2\}$ et $\overline{W}_1 \subset U_2 \cup \{c_1, c_2\}$ d'où $\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 \subset \{c_2\}$. Si $0 \in U_2$, on a $\overline{W}_1 \subset U_1 \cup \{c_1\}$ et $\overline{W}_2 \subset U_3 \cup \{c_2\}$, d'où $\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 = \emptyset$. Si $0 \in U_3$ on a $\overline{W}_1 \subset U_1 \cup \{c_1\}$ et $\overline{W}_2 \subset U_2 \cup \{c_1, c_2\}$, d'où $\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 = \emptyset$ ou $\{c_1\}$. Cqfd.

Corollaire. — *Le théorème 1.*

Car on ne peut avoir $W_1 = W_2$ et $c_1 \neq c_2$.

Troisième démonstration

Lemme 3 (Sullivan). — *Soit $c \in W$ tel que $\rho(c) \neq 0$. Alors $\rho'(c) \neq 0$.*

La démonstration utilise le théorème d'intégrabilité de Morrey-Ahlfors-Bers.

Démonstration. — Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ le cycle attractif de f_c . Le bassin de ce cycle est $\overset{\circ}{K}$, posons $V = \overset{\circ}{K} \setminus \{z \mid \exists n, f^n(z) = \alpha_1\}$. Soit E le quotient de V par la relation $Z_1 \sim Z_2 \Leftrightarrow \exists (n_1, n_2), f^{n_1}(z_1) = f^{n_2}(z_2)$. Alors E est de façon naturelle une surface de Riemann compacte de genre 1. Si σ est une forme de Beltrami continue de norme < 1 sur E , en notant $\chi : V \rightarrow E$ l'application canonique, $\tilde{\sigma} = \chi^*(\sigma)$ prolongée par 0 est une forme de Beltrami invariante par f_c , mesurable bornée de norme < 1 donc intégrable. Si $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est tel que $\bar{\partial}\varphi/\partial\varphi = \tilde{\sigma}$, l'application $\varphi \circ f_c \circ \varphi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe (parce que $\tilde{\sigma}$ est invariante par f) et propre de degré 2, c'est donc un polynôme de degré 2, affinement conjugué à un $z \mapsto z^2 + c(\sigma)$. On a $c(0) = c$, et $\text{Log } \rho_w(c(\sigma))/2i\pi =$ rapport des périodes de (E, σ) . On peut choisir une application continue $\rho \mapsto \sigma(\rho)$ de façon que $\rho \mapsto c(\sigma(\rho))$ soit une section continue de $c \mapsto \rho_w(c)$. Cqfd.

Démonstration 3 du théorème 2. — Le lemme 4 et le lemme 2 montrent que $\rho_w : W \rightarrow \mathbb{D}$ est un revêtement. Comme \mathbb{D} est simplement connexe il est trivial. Cqfd.

Pour une quatrième démonstration, variante de la précédente évitant le lemme de Gleason, voir l'exposé du Séminaire Bourbaki de novembre 82.

EXPOSÉ XX

NERVURES

Nous donnons d'abord une méthode pour étudier un compact plein connexe localement connexe de \mathbb{C} . Le compact M est connexe et plein, mais on ne sait pas montrer qu'il est localement connexe. Nous verrons cependant que, par son aspect combinatoire, la méthode que nous proposons peut lui être appliquée.

1. Points extrémaux

Soit $K \subset \mathbb{C}$ un compact connexe plein localement connexe, et choisissons un centre pour chaque composante connexe de $\overset{\circ}{K}$. Pour x et $y \in K$, on note $[x, y]_K$ l'arc réglementaire de x à y , et si x_1, \dots, x_n sont des éléments de K , on note $[x_1, \dots, x_n]_K$ l'enveloppe réglementaire de $\{x_1, \dots, x_n\}$ (cf. II).

Notons γ_K le lacet de Carathéodory $\mathbb{T} \rightarrow \partial K$. Pour $x \in K$, les points de $\gamma_K^{-1}(x)$ sont les *arguments externes* de x .

Proposition 1 et Définition. — *Soit $x \in K$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $x \in \partial K$ et $K \setminus \{x\}$ est connexe.
- (ii) x a un argument externe et un seul.
- (iii) On ne peut pas trouver deux points $y, z \in K \setminus \{x\}$ tels que $x \in [y, z]_K$.

Si x satisfait à ces conditions, on dit que x est un point extrémal de K .

Démonstration

a) (non (i)) \Rightarrow (non (iii)) : Si x appartient à une composante connexe U de $\overset{\circ}{K}$, on peut trouver y et $z \in \partial U$ tels que $x \in [y, z]_K$. Si $K \setminus \{x\}$ n'est pas connexe, on prend y et z dans deux composantes connexes différentes de $K \setminus \{x\}$; alors $x \in [y, z]_K$.

b) (non (iii)) \Rightarrow (non (ii)) : Si $x \in \overset{\circ}{K}$, il n'a pas d'argument externe. Si $x \in \partial K$ et $x \in]y, z[_K$, il y a 2 accès à x relativement à l'arbre $[y, z]_K$ (cf. VII), donc x a au moins 2 arguments externes.

c) (non (ii)) \Rightarrow (non (i)) : Soient t et t' deux arguments externes de x et $L = \mathcal{R}(K, t) \cup \mathcal{R}(K, t') \cup \{x\}$. On peut trouver $s \in [t, t']$ et $s' \in [t', t]$ tels que $y = \gamma(s) \neq x$ et $z = \gamma(s') \neq x$ (un lacet de Carathéodory n'est jamais constant sur un intervalle). Alors, y et z sont de part et d'autre de L et $x \in [y, z]_K$. Cqfd.

2. Nervures de K

Mêmes hypothèses sur K . Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points extrémaux de K . On note t_n l'argument externe de a_n , et on suppose que $t_0 = 0$. On pose $H_n = [a_0, \dots, a_n]_K$ ⁽¹⁾. Pour chaque n , H_n est un arbre topologique fini, et pour $n \geq 1$ on peut écrire $H_n = H_{n-1} \cup [d_n, a_n]_K$, avec $H_{n-1} \cap [d_n, a_n]_K = \{d_n\}$. Ceci détermine $d_n \in K$.

On note $\mathbf{n}(t_n)$ et on appelle *nervure* d'argument externe extrémal t_n , ou nervure d'extrémité a_n , l'arc réglementaire $[d_n, a_n]_K$. Le point d_n s'appelle l'*origine* de $\mathbf{n}(t_n)$, et $\mathbf{n}^*(t_n) =]d_n, a_n]_K = [d_n, a_n]_K \setminus \{d_n\}$ est appelé la *nervure stricte* d'extrémité a_n . Pour x et $y \in K$, nous dirons que y est *après* x et nous écrirons $x \leq y$ si $x \in [a_0, y]_K$.

Nous allons définir, pour tout $x \in K$, deux nombres $\arg_-(x)$ et $\arg_+(x)$ de $[0, 1]$. Pour $t \in \mathbb{T}$, notons \dot{t} le représentant de t dans $[0, 1]$.

- Si $x \in \partial K \setminus \{a_0\}$, on pose $\arg_-(x) = \inf_{t \in \gamma_K^{-1}(x)} \dot{t}$ et $\arg_+(x) = \sup_{t \in \gamma_K^{-1}(x)} \dot{t}$.
- Si $x = a_0$, on pose $\arg_-(x) = 0$ et $\arg_+(x) = 1$.

– Si x est le centre d'une composante U de $\overset{\circ}{K}$, l'arc $[a_0, x]_K$ coupe ∂U en un point unique $y = \pi_U(a_0)$ (projection de a_0 sur \overline{U}), et $\arg_-(y)$ et $\arg_+(y)$ correspondent à 2 accès à y relativement à $[a_0, x]_K$. On prend pour $\arg_-(x)$ le plus grand des \dot{t} pour t argument externe de y dans le même accès que $\arg_-(y)$, et on définit $\arg_+(x)$ symétriquement. On a donc : $0 \leq \arg_-(y) \leq \arg_-(x) < \arg_+(x) \leq \arg_+(y) \leq 1$.

– Si x appartient à U sans en être le centre, notons x_0 le centre de U et soit $[x_0, x_1]_K$ le rayon interne de \overline{U} passant par x . On pose :

$$\arg_{\pm}(x) = \begin{cases} \arg_{\pm}(x_1) & \text{si } x_1 \neq \pi_U(a_0), \\ \arg_{\pm}(x_0) & \text{si } x_1 = \pi_U(a_0). \end{cases}$$

Dans tous les cas, on note $I(x)$ l'intervalle $[\arg_-(x), \arg_+(x)]$.

On définit également les *arguments associés* à x :

– si $x \in \partial K \setminus \{a_0\}$, les arguments associés à x sont les \dot{t} , où t est un argument externe de x .

– Si $x = a_0$, ce sont 0 et 1.

– Si x est le centre d'une composante U de $\overset{\circ}{K}$, ce sont les $\arg_-(y)$ et les $\arg_+(y)$ pour $y \in \partial U \setminus \{\pi_U(a_0)\}$, ainsi que $\arg_-(x)$ et $\arg_+(x)$.

⁽¹⁾Si $a_0 \in \partial U_0$, où U_0 est une composante de $\overset{\circ}{K}$ (nécessairement unique puisque a_0 est extrémal), on prend pour H_0 le rayon interne de U_0 d'extrémité a_0 et non l'ensemble $\{a_0\}$.

– Si x appartient à U sans en être le centre, les arguments associés à s sont $\arg_-(x)$ et $\arg_+(x)$.

Pour tout intervalle $I \subset [0, 1]$ contenant l'un des t_n , on appelle *chef-lieu* de I le nombre $t_{n(I)}$, où $n(I)$ est le plus petit n tel que $t_n \in I$ (je n'ose pas dire « centre » de peur qu'on croie que c'est le milieu).

Proposition 2. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in K$. On suppose que $x \in \partial K$ ou que x est le centre d'une composante de $\overset{\circ}{K}$

(a) On a $x \in \mathbf{n}^*(t_n)$ si et seulement si t_n est le chef-lieu de $I(x)$.

(b) On a $x \in \mathbf{n}(t_n)$ si et seulement si t_n est le chef-lieu d'un intervalle de la forme $[\theta', \theta'']$, où θ' et θ'' sont des arguments associés à x .

Démonstration. — Posons $\theta_{\pm} = \arg_{\pm}(x)$; soit x_1 le point d'aboutissement commun de $\mathcal{R}(K, \theta_-)$ et $\mathcal{R}(K, \theta_+)$ (qui est x si $x \in \partial K$). Si x appartient à une composante U de $\overset{\circ}{K}$, notons x_0 son centre, et si $x \in \partial K$ on pose $x_0 = x$. On pose $L = \mathcal{R}(\theta_-) \cup \mathcal{R}(\theta_+) \cup \{x_1\}$.

(a) Cas $x_1 = a_0$. Avec les conventions prises, on a $x \in \mathbf{n}^*(t_0) = \mathbf{n}(t_0)$. Or $I(x) = [0, 1]$, et le chef-lieu de $[0, 1]$ est $0 = t_0$.

(a) $x_1 \neq a_0$, \Leftarrow . L est homéomorphe à \mathbb{R} , et $\mathbb{C} \setminus L$ a 2 composantes connexes V_0 et V_1 , $V_0 \supset \mathcal{R}(K, 0)$. Par définition du chef-lieu, on a $a_i \in V_0$ pour $i = 0, \dots, n-1$, et $a_n \in V_1 \cup \{x_1\}$. Comme $d_n \in H_{n-1}$, on a $d_n \in V_0 \cup \{x_1\}$.

Si $d_n = x_1$, soit t_i tel que $i < n$ et $a_i \geq x_1$; on a $t_i \in I(x_1)$, donc $I(x_1) \neq I(x)$, ceci n'est possible que si $x = x_0$ centre d'une composante U , et dans ce cas $x \in]x_1, a_n]$.

Si $d_n \neq x_1$, on a $d_n \in V_0$, et $x_1 \in]d_n, a_n]$, et dans chaque cas on en déduit que $x \in]d_n, a_n]$.

(a) $x_1 \neq a_0$, \Rightarrow . Gardons les définitions de L , V_0 et V_1 . On a $a_n \geq x$. On en déduit que $a_n \in V_1 \cup \{x_1\}$, d'où $t_n \in I(x)$. Pour $i < n$, on a $a_i \not\geq x$. On en déduit que $a_i \in V_0 \cup \{x_i\}$. On ne pourrait avoir $a_i = x_1$ que si $x_0 > x_1$, mais dans ce cas x_1 n'est pas extrémal, donc nécessairement $a_i \neq x_1$, $a_i \in V_0$ et $t_i \notin I(x)$. Par suite, t_n est le chef-lieu de $I(x)$.

(b) \Leftarrow . Posons $L' = \mathcal{R}(\theta') \cup \mathcal{R}(\theta'') \cup [x'_1, x''_1]_K$, où x'_1 et x''_1 sont les points d'aboutissement de $\mathcal{R}(\theta')$ et $\mathcal{R}(\theta'')$ respectivement. Notons V'_0 et V'_1 les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus L'$, avec $V'_0 \ni \mathcal{R}(0)$. On a $t_n \in [\theta', \theta'']$, d'où $a_n \in V'_1 \cup \{x'_1, x''_1\}$. Pour $i < n$, on a $t_i \notin [\theta', \theta'']$, d'où $a_i \in V'_0$. Par suite, $d_n \in V'_0 \cup \{x_0\}$, et dans chaque cas on en déduit $x \in [d_n, a_n] = \mathbf{n}(t_n)$.

(b) \Rightarrow . Si $x \in \partial K$, soient θ' et θ'' des arguments externes de x dans des accès à H_n tels que parmi les points a_0, \dots, a_n , seul a_n soit entre $\mathcal{R}(\theta')$ et $\mathcal{R}(\theta'')$. Alors, $t_n \in [\theta', \theta'']$, $t_i \notin [\theta', \theta'']$ pour $i < n$ et t_n est le chef-lieu de $[\theta', \theta'']$.

Supposons que x appartient à une composante U de $\overset{\circ}{K}$, de centre x_0 . Notons y le point où $[x, a_n]$ coupe ∂U . Si $x \notin]x_0, \pi_U(a_0)]$, on prend $\theta' = \arg_-(y)$ et $\theta'' = \arg_+(y)$.

Si $x \in]x_0, \pi_U(a_0)]$, on prend $\theta' = \arg_-(x_0)$ et $\theta'' = \arg_+(x_0)$. Dans chaque cas, on a $t_i \notin [\theta', \theta'']$ pour $i < n$, et on a $t_n \in [\theta', \theta'']$ car $t_n \geq y$ dans un cas et $t_n \geq \pi_U(a_0)$ dans l'autre. Donc, t_n est le chef-lieu de $[\theta', \theta'']$. Cqfd.

3. Nervures combinatoires

Dans l'ensemble de Mandelbrot M , définissons une partie dénombrable : on note \mathcal{D}_0 (resp. \mathcal{D}_1) l'ensemble des centres (resp. des racines) des composantes hyperboliques de $\overset{\circ}{M}$. Notons \mathcal{D}_2 l'ensemble des points de Misurewicz, et posons $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.

Nous allons définir pour chaque $c \in \mathcal{D}$ les arguments (combinatoirement) associés à c .

– Si $c \in \mathcal{D}_2$, le point c a dans K_c un nombre fini d'arguments externes (qui sont des rationnels à dénominateur pair). Ce sont les arguments associés à c . Le plus petit et le plus grand sont notés $\arg_-(c)$ et $\arg_+(c)$.

– Si $c \in \mathcal{D}_1$, soit α_1 le point périodique indifférent attirant la composante U_1 de $\overset{\circ}{K}_c$ contenant c . Les arguments associés à c sont les 2 arguments externes de α_1 correspondant aux interpétales adjacents à U_1 . Le plus petit (resp. grand) est noté $\arg_-(c)$ (resp. $\arg_+(c)$).

– Si c est le centre d'une composante hyperbolique W de $\overset{\circ}{M}$, les arguments associés à c sont les arguments associés aux points de ∂W d'argument interne rationnel (qui sont des points de \mathcal{D}_1). Le plus petit et le plus grand sont respectivement $\arg_-(c_1)$ et $\arg_+(c_1)$, où c_1 est la racine de W . Nous poserons $\arg_-(c) = \arg_-(c_1)$ et $\arg_+(c) = \arg_+(c_1)$.

– Si $c \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, pour tout argument θ associé à c , le rayon externe $\mathcal{R}(M, \theta)$ aboutit en c .

On note (t_n) la suite des nombres de $[0, 1[$ de la forme $p/2^k$, ordonnés par k croissants et pour chaque k par p croissants, de sorte que :

$$p/2^k = t_n \quad \text{avec} \quad 2n + 1 = 2^k + p.$$

Remarques

1) Le fait de choisir pour chaque k l'ordre des p croissants n'a aucune importance pour ce que nous voulons faire, car l'ordre sert à définir les chef-lieux des intervalles de $[0, 1[$. Mais chaque intervalle $I \subset [0, 1[$ qui contient un point de la forme $p/2^k$ (en particulier tout intervalle non réduit à un point) en contient un seul avec k minimum. En effet, si $p/2^k \in I$ et $p'/2^k \in I$, avec p et p' impairs et $p' > p$, $(p+1)/2^k \in I$, mais cette fraction se simplifie.

2) Pour tout $n > 0$, notons a_n le point d'aboutissement de $\mathcal{R}(M, t_n)$. Le polynôme f_{a_n} est tel que 0 tombe en un temps fini sur le point fixe $\beta(a_n)$ d'argument externe 0.

En particulier, $a_n \in \mathcal{D}_2$, et il y a un seul argument associé à a_n , à savoir t_n . On obtient ainsi une bijection de $\{t_n\}_{n>0}$ sur $\{c \mid (\exists k), f_c^{k+1}(0) = \beta(c)\}$. [Cela résulte de XIII].

On a $a_0 = 1/4 \in \mathcal{D}_1$. On pose $I(c) = [\theta_-(c), \theta_+(c)]$. On définit la nervure combinatoire $N(t_n)$ et la nervure combinatoire stricte $N^*(t_n)$ par :

$$N^*(t_n) = \{c \in \mathcal{D} \mid t_n \text{ est le chef-lieu de } I(c)\}$$

$$N(t_n) = \{c \in \mathcal{D} \mid (\exists \theta', \theta'' \text{ associés à } c) t_n \text{ est le chef-lieu de } [\theta', \theta'']\}.$$

Remarque. — Si, comme on l'imagine, M est localement connexe et tout point $c \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ n'a pas d'autre argument externe dans M que ses arguments combinatoirement associés, on a : $N(t_n) = \mathbf{n}(t_n) \cap \mathcal{D}$ et $N^*(t_n) = \mathbf{n}^*(t_n) \cap \mathcal{D}$ en vertu de la proposition 2.

4. Ordre sur \mathcal{D}

Pour $c \in \mathcal{D}$, posons $I(c) = [\arg_-(c), \arg_+(c)]$. Nous écrirons $c < c'$ si $I(c) \supsetneq I(c')$ ou si c est la racine et c' le centre d'une même composante hyperbolique de $\overset{\circ}{M}$. Nous écrirons $c \leq c'$ si $c < c'$ ou $c = c'$. On définit ainsi un ordre sur \mathcal{D} .

Proposition 3. — Soient c et c' dans \mathcal{D} . On a $I(c) \supset I(c')$ ou $I(c') \subset I(c)$ ou $I(c) \cap I(c') = \emptyset$.

Démonstration. — Si c est le centre d'une composante hyperbolique W , notons c_1 la racine de W ; posons $c_1 = c$ si $c \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Si c n'est pas extrémal⁽²⁾, $\mathcal{L}(c) = \mathcal{R}(M, \theta_-(c)) \cup \mathcal{R}(M, \theta_+(c)) \cup \{c_1\}$ est homéomorphe à \mathbb{R} , et $\mathcal{L}(c)$ a 2 composantes connexes $V_0(c)$ et $V_1(c)$ (on convient que $\mathcal{R}(M, 0) \subset V_0(c)$). Si $c_1 = c'_1$, on a $I(c) = I(c')$. Sinon, on a $\mathcal{L}(c) \cap \mathcal{L}(c') = \emptyset$, d'où $V_1(c) \subsetneq V_1(c')$ ou $V_1(c) \supsetneq V_1(c')$ ou $V_1(c) \cap V_1(c') = \emptyset$, d'où la conclusion. Cqfd.

Corollaire 1. — Dans l'ensemble ordonné \mathcal{D} , toute partie majorée est totalement ordonnée.

Démonstration. — Soit X une partie majorée par un point \hat{c} . Pour c et c' dans X , on a $I(c) \supset I(\hat{c})$, $I(c') \supset I(\hat{c})$, donc $I(c) \cap I(c') \neq \emptyset$, d'où $c \leq c'$ ou $c' \leq c$. Cqfd.

Corollaire 2. — Pour tout $n \neq 0$, l'ensemble $N^*(t_n)$ est un ensemble totalement ordonné, dont a_n est le plus grand élément.

Remarque. — $N(a) = N^*(0) = \{1/4, 0\}$ avec $a_0 = 1/4$, $0 > 1/4$.

Proposition 4. — Soient c et \tilde{c} deux éléments de $N(t_n)$ avec $\tilde{c} \in N(t_n) \setminus N^*(t_n)$; alors $\tilde{c} \leq c$.

⁽²⁾Si c est extrémal ou $c = 0$, $I(c)$ est réduit à un point ou $I(c) = [0, 1]$.

Démonstration. — Si c est extrémal, $c = t_n$ et $\tilde{c} \leq c$. On suppose c non extrémal. Soient θ' et θ'' des arguments associés à c tels que t_n soit le chef-lieu de $[\theta', \theta'']$. On définit $\mathcal{L}(\theta', \theta'')$ de la façon suivante :

Si $c \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, on pose $\mathcal{L}(\theta', \theta'') = \mathcal{R}(M, \theta') \cup \mathcal{R}(M, \theta'') \cup \{c\}$.

Si $c \in \mathcal{D}_0$, notons c'_1 et c''_1 les points d'aboutissement de $\mathcal{R}(M, \theta')$ et $\mathcal{R}(M, \theta'')$. On a c'_1 et $c''_1 \in \partial W$, où W est la composante de centre c .

Si $c'_1 = c''_1$, on pose $\mathcal{L}(\theta', \theta'') = \mathcal{R}(M, \theta') \cup \mathcal{R}(M, \theta'') \cup c'_1$. Sinon, on pose $\mathcal{L}(\theta', \theta'') = \mathcal{R}(M, \theta') \cup \mathcal{R}(M, \theta'') \cup [c, c'_1]_{\overline{W}} \cup [c, c''_1]_{\overline{W}}$. Dans tous les cas, $\mathcal{L}(\theta', \theta'')$ est homéomorphe à \mathcal{R} , et $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}(\theta, \theta')$ a deux composantes connexes $V_0(\theta, \theta')$ et $V_1(\theta, \theta')$, avec $\mathcal{R}(M, 0) \subset V_0(\theta, \theta')$.

On a $V_1(\theta, \theta') \cap V_1(\tilde{c}) \neq \emptyset$, car ces deux ensembles contiennent $\mathcal{R}(M, t_n)$, et $V_1(\theta', \theta'') \not\supseteq V_1(\tilde{c})$ car $I(\tilde{c})$ contient un t_n , avec $n' < n$ et $[\theta', \theta'']$ non. Si $\tilde{c}_1 \neq c'_1, c''_1$, on a $\mathcal{L}(\theta', \theta'') \cap \mathcal{L}(\tilde{c}) = \emptyset$, d'où $V_1(\theta', \theta'') \subset V_1(\tilde{c})$ et $\tilde{c} \leq c$. Si on avait $\tilde{c}_1 = c'_1 \neq c_1$, on aurait $V_1(\tilde{c}) \subset V_1(\theta', \theta'')$ ce qui n'est pas le cas. Si on avait $\tilde{c}_1 = c'_1 = c''_1 = c_1$, on aurait $V_1(\theta', \theta'') = V_1(\tilde{c})$, ce qui est impossible. On est donc dans le cas $\tilde{c}_1 \neq c'_1, c''_1$, et on a $\tilde{c} \leq c$. Cqfd.

Corollaire et Définition. — *L'ensemble $N(t_n) \setminus N^*(t_n)$ a au plus un point. S'il a un point, c'est le plus petit élément de $N(t_n)$, on dit que c'est l'origine de la nervure $N(t_n)$.*

Nous montrerons — c'est le théorème principal de la théorie des nervures — que toute nervure $N(t_n)$ a une origine.

EXPOSÉ XXI

ARBRE DE L'ORIGINE D'UNE NERVURE DE M

1. Arbres de Hubbard abstraits

Nous appelons *arbre de Hubbard abstrait* un arbre topologique fini H , muni d'une suite prépériodique (x_n) de points, et d'une classe d'isotopie de plongements $H \rightarrow \mathbb{C}$ (ou ce qui revient au même d'un ordre cyclique sur les brins aux points de branchement), satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) Toute extrémité est l'un des (x_i) ;
- (ii) H coupé en x_0 a au plus 2 composantes ;
- (iii) Il existe une application continue $F : H \rightarrow H$ injective et préservant l'ordre cyclique aux points de branchement sur chacune des composantes de H coupé en x_0 , et telle que $F(x_i) = x_{i+1}$ pour tout i .

L'application F est déterminée de façon unique, à isotopie laissant fixe les points remarquables près.

Un arbre de Hubbard abstrait est dit périodique ou strictement prépériodique suivant que x_0 est périodique ou strictement prépériodique pour F .

L'arbre de Hubbard d'un polynôme $f : z \mapsto z^2 + c$ tel que 0 soit prépériodique a un arbre abstrait sous jacent.

Étant donné un arbre de Hubbard abstrait H , on peut définir $\arg_-(H)$ et $\arg_+(H)$, ainsi que les arguments associés à H , par les algorithmes décrits en VII, en XX et en XVIII.

2. Résultats et notations

Soit $\tau \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ un élément de la forme $p/2^k$. Nous avons l'intention de montrer que la nervure combinatoire $N(\tau)$ de M a une origine dans $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$.

Dans cet exposé, nous allons construire un arbre abstrait \check{H} ayant des propriétés telles que, s'il est l'arbre d'un point $\check{c} \in \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$, le point \check{c} est l'origine de la nervure $N(\tau)$.

Théorème. — *Il existe un arbre de Hubbard abstrait \check{H} ayant les propriétés suivantes :*

- a) τ appartient à $I(\check{H}) = [\arg_-(\check{H}), \arg_+(\check{H})]$ sans en être le chef-lieu.
- b) Il existe deux arguments θ' et θ'' associés à \check{H} tels que τ soit le chef-lieu de $[\theta', \theta'']$.

Dans la suite, on fixe $\tau = p/2^k$ (avec $k \geq 1$, p impair, $0 < p < 2^k$). Soit $c = a_\tau$ le point d'aboutissement de $\mathcal{R}(M, \tau)$. On pose $f = f_c : z \mapsto z^2 + c$, $K = K_c, H = H_c$ (arbre de Hubbard de f), $\beta = \beta_c$ (point fixe de f d'argument externe 0). On a $f^k(c) = f^{k+1}(0) = \beta$, $f^{k-1}(c) = -\beta$, le compact K est plein, connexe, localement connexe et d'intérieur vide. Pour x et y dans K , on note $[x, y]$ l'arc de x à y dans K ; plus généralement, pour toute partie finie A de K , on note $[A]$ l'enveloppe connexe de A dans K . On pose $x_n = f^n(0)$. Si X est un arbre et $z \in X$, on note $\nu_X(z)$ le nombre de brins de X en z .

3. Rang d'un point de K

Pour $z \in K$, on pose $\text{rg}(z) = \inf\{r \mid f^r(z) \in [\beta, -\beta]\}$. On a donc $\text{rg}(z) = \infty$ si $(\forall r) f^r(z) \notin [\beta, -\beta]$, et $\text{rg}(z) = 0$ si $z \in [\beta, -\beta]$. Si $\text{rg}(z) > 0$, on a $\text{rg}(f(z)) = \text{rg}(z) - 1$. On a $\text{rg}(c) = k - 1$. En effet, $f^{k-1}(c) = -\beta \in [\beta, -\beta]$, et si $k \geq 2$, $f^{k-2}(c) \in f^{-1}(-\beta)$; c'est un point extrémal de K distinct de β et $-\beta$, donc n'appartenant pas à $[\beta, -\beta]$.

Remarques

1) Si $\text{rg}(z) = r > 0$, on a $f^r(z) \in [0, -\beta]$. En effet, $f([\beta, 0]) = [\beta, x] \supset [\beta, 0]$. Par suite, $f^{-1}([\beta, 0]) \subset [0, \beta] \cup [0, -\beta] = [\beta, -\beta]$, et si $f^s(z) \in [0, \beta]$ avec $s > 0$, on a $f^{s-1}(z) \in [\beta, -\beta]$ et $s > \text{rg}(z)$.

2) Si $\text{rg}(z) = r$, le point z a deux arguments externes t et t' dans K , admettant en base 2 des développements $t = .\varepsilon_1\varepsilon_2\dots\varepsilon_n\dots, t' = \varepsilon'_1\varepsilon'_2\dots$ tels que $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$ pour $i \leq r$, $\varepsilon'_{n+1} \neq \varepsilon_{r+1}$ (éventuellement $t = t'$, mais avec deux développements différents). En effet, un point de $[\beta, -\beta]$ a deux arguments externes $t = .0\dots$ et $t' = .1\dots$, et cela caractérise les points de $[\beta, -\beta]$, et les arguments externes de $f^i(z)$ s'obtiennent à partir des arguments externes de z par multiplication par 2^i , ce qui se traduit sur l'écriture en base 2 par la suppression des i premiers chiffres.

4. L'arbre Z_r

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on note Z_r l'ensemble des $z \in K$ tels que $\text{rg}(z) \leq r$. On a : $Z_{r+1} = f^{-1}(Z_r) \cup [+ \beta, -\beta]$.

Proposition 1. — *L'ensemble Z_r est l'enveloppe connexe dans K de $f^{-(r+1)}(\beta)$.*

Démonstration par récurrence sur r . — On a $Z_0 = [\beta, -\beta] = [f^{-1}(\beta)]$. Mettons K sous la forme $K_+ \cup K_-$, avec $K_+ \cap K_- = \{0\}$, $K_- = -K_+$, et pour toute partie A de K posons $A_+ = A \cap K_+$, $A_- = A \cap K_-$. L'application f induit un homéomorphisme de $(f^{-1}(Z_r))_+$ sur Z_r et de même pour $(f^{-1}(Z_r))_-$. Si $Z_r = [f^{-(r+1)}(\beta)]$, on a $(f^{-1}(Z_r))_+ = [(f^{-(r+2)}(\beta))_+]$, et de même avec $-$.

Pour toute partie finie A de K contenant β et $-\beta$, on a $[A] = [A_+] \cup [A_-] \cup [\beta, -\beta]$. Par suite,

$$[f^{-(r+2)}(\beta)] = [f^{-1}(Z_r)]_+ \cup (f^{-1}(Z_r))_- \cup [\beta, -\beta] = f^{-1}(Z_r) \cup [\beta, -\beta] = Z_{r+1}. \quad \text{Cqfd.}$$

Corollaire. — Pour tout r , l'ensemble Z_r est un arbre topologique fini.

Proposition 2. — Pour $r \in \mathbb{N}$, l'ensemble $Z_{r+1} \setminus Z_r$ ne contient aucun point de branchement de Z_{r+1} .

Démonstration par récurrence sur r . — Puisque $0 \in Z_0$, f induit une application localement injective $Z_1 \setminus Z_0 \rightarrow Z_0$. Or, $Z_0 = [-\beta, \beta]$ n'a pas de point de branchement. Donc, $Z_1 \setminus Z_0$ n'a pas de point de branchement. Pour chaque $r \geq 1$, l'application f induit une application localement injective de $Z_{r+1} \setminus Z_r$ dans $Z_r \setminus Z_{r-1}$. On voit alors par récurrence que $Z_{r+1} \setminus Z_r$ n'a pas de point de branchement. Cqfd.

Proposition 3. — Pour $r \geq k-1$, on a $f(Z_r) \subset Z_r$.

Démonstration. — Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $f(Z_r) \subset Z_{r-1} \cup f([\beta, -\beta]) = Z_{r-1} \cup [\beta, x_1]$, et $Z_{r-1} \subset Z_r$. Mais si $r \geq k-1$, on a $[\beta, x_1] \subset Z_r$, d'où $f(Z_r) \subset Z_r$. Cqfd.

5. Le point y_1

On a $x_1 \in Z_{k-1} \setminus Z_{k-2}$ puisque $\text{rg}(x_1) = k-1$. Notons y_1 la projection de x_1 sur Z_{k-2} , c'est-à-dire le premier point (en partant de x_1) où l'arc $[x_1, 0]$ rencontre Z_{k-2} .

On pose $y_n = f^{n-1}(y_1)$.

Proposition 4. — Le point y_1 est un point de branchement de Z_{k-1} .

Démonstration. — Pour $z \in K$, si $z \neq 0$ et si $f(z)$ est extrémal dans K , z est extrémal. Comme β est extrémal (VII, § 3, lemme 1), si $f^n(z) = \beta$ et $f^i(z) \neq 0$ pour $0 \leq i \leq n$, le point z est extrémal. En particulier, si $f^k(z) = \beta$, z est extrémal dans K .

Or y_1 n'est pas un point extrémal de Z_{k-1} puisque $y_1 \in [0, x_1[\cup]\beta, x_1[$. Donc $f^k(y_1) \neq \beta$ et y_1 n'est pas non plus un point extrémal de Z_{k-2} . Il y a donc au moins deux brins de Z_{k-2} en y_1 , et $[y_1, x_1]$ est un brin de Z_{k-1} en y_1 , distincts des précédents puisque $[y_1, x_1] \cap Z_{k-2} = \{y_1\}$ par définition de y_1 . Cela fait donc au moins 3 brins de Z_{k-1} en y_1 . Cqfd.

Corollaire. — Le point y_1 est prépériodique pour f .

Démonstration. — Le point $x_1 = f(0)$ est un point extrémal de Z_{k-1} . Par suite, 0 n'est pas un point de branchement de Z_{k-1} , et si z est un point de branchement de Z_{k-1} (avec $\nu_{k-1}(z)$ brins, $\nu_{k-1}(z) \geq 3$), il en est de même de $f(z)$ (avec $\nu_{k-1}(f(z)) \geq \nu_{k-1}(z)$). Comme le nombre de points de branchement de Z_{k-1} est fini, tout point de branchement est prépériodique. Cqfd.

Puisque $f^{-1}(x_1) = \{0\}$, l'ensemble $f^{-1}([y_1, x_1])$ est un arc $[\delta, -\delta]$. Les points δ et $-\delta$ sont les points de $f^{-1}(y_1)$. L'arc ouvert $] \delta, -\delta[$ ne contient aucun point de branchement Z_{k-1} , puisque $f(] - \delta, \delta[) =]y_1, x_1]$, et que cet arc, contenu dans $Z_{k-1} \setminus Z_{k-2}$, ne contient aucun point de branchement de Z_{k-1} (proposition 2).

En particulier, $(\forall n), y_n \notin] \delta, -\delta[$.

Nous allons maintenant définir un point y_0 : Si y_1 est périodique de période k , on a $y_k = \delta$ ou $-\delta$. On pose alors $y_0 = y_k$. Si y_1 est strictement prépériodique, on a $y_n \notin \{\delta, -\delta\}$ pour tout n , on prend pour y_1 l'un quelconque des points δ ou $-\delta$.

6. L'arbre \check{H}

On note \check{H} l'enveloppe connexe des $(y_n)_{n \geq 0}$ dans Z_{k-1} (ou dans K ce qui revient au même).

Proposition 6. — On a $f(\check{H}) \subset \check{H} \cup [y_1, x_1]$ et $\check{H} \cap [y_1, x_1] = \{y_1\}$.

Démonstration. — Soient $(Z_{k-1})_+$ et $(Z_{k-1})_-$ les composantes de Z_{k-1} coupé en 0, et posons $\check{H}_+ = \check{H} \cap (Z_{k-1})_+$, et de même pour \check{H}_- . L'ensemble \check{H}_+ est l'enveloppe connexe des $(y_n)_{n \in \Lambda_+}$, où $\Lambda_+ = \{n \mid y_n \in (Z_{k-1})_+\}$, et éventuellement de 0. Alors,

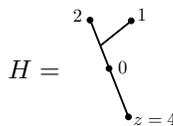
$$f(\check{H}_+) \subset [\{y_{n+1}\}_{n \in \Lambda_+}, x_1], \quad f(\check{H}_-) \subset [\{y_{n+1}\}_{n \in \Lambda_-}, x_1],$$

et

$$f(\check{H}) \subset [\{y_n\}, x_1] = \check{H} \cup [y_1, x_1].$$

La deuxième assertion résulte du fait que $]y_1, x_1]$ ne contient aucun point de branchement de Z_{k-1} , donc aucun des y_n . Cqfd.

Remarque. — On peut montrer, en utilisant le fait que f est sous-hyperbolique, que $f(\check{H}) = \check{H} \cup [y_1, x_1]$, sauf si $\check{H} = \{y_1\}$, ce qui se produit si y_1 est un point fixe de f . Exemple :



Proposition 7. — Le point y_1 est un point extrémal de \check{H} .

Démonstration. — On écrira $\check{\nu}(z)$ pour $\nu_{\check{H}}(z)$.

Si y_1 est périodique de période K , on a :

$$\check{\nu}(y_1) \leq \check{\nu}(y_2) \leq \dots \leq \check{\nu}(y_k) \leq \check{\nu}(y_1) + 1$$

en vertu de la proposition 6 et du fait qu'aucun des y_i n'est 0. Or \check{H} a au moins une extrémité. On a donc : $\check{H}(y_1) \leq 1$.

Si y_1 est strictement prépériodique, on a :

$$\check{\nu}(y_0) - 1 \leq \check{\nu}(y_1) \leq \check{\nu}(y_2) \leq \dots$$

Or \check{H} n'est pas réduit à un point, il a au moins 2 extrémités, d'où $\check{\nu}(y_1) = 1$. Cqfd.

7. Condition de Hubbard pour \check{H}

L'arbre \check{H} est muni de la topologie et du plongement dans \mathbb{C} induits par ceux de K (ou de Z_{k-1} , ou de H), et des points (y_n) .

Proposition 8. — *L'arbre \check{H} est un arbre de Hubbard abstrait.*

Démonstration. — La condition (i) de la définition du §2 résulte du fait que \check{H} est l'enveloppe connexe des y_i . On a $\check{\nu}(y_0) \leq \check{\nu}(y_1) + 1 \leq 2$, d'où (ii). Nous allons montrer qu'on a la condition (iii).

Posons $\check{f} = \rho \circ f$, où $\rho : Z_{k-1} \rightarrow Z_{k-1}$ coïncide avec l'identité sur $Z_{k-1} \setminus]y_1, x_1]$, et applique $]y_1, x_1]$ sur y_1 . On a $\check{f}(\check{H}) \subset \check{H}$ en vertu de la proposition 6, et $\check{f}(y_n) = y_{n+1}$ pour tout n . Malheureusement f est constante sur $[\delta, -\delta] = [y_0, -y_0]$.

Si $\check{H} \cap]y_0, -y_0] = \emptyset$ (ce qui en fait ne se produit que si $H = y_1$), \check{f} est injective sur \check{H} et \check{H} est un arbre de Hubbard abstrait. On suppose maintenant que cette intersection est $\neq \emptyset$, d'où $]y_0, -y_0] \subset \check{H}$. Dans le cas périodique comme dans le cas prépériodique, le point $-y_0$ n'est pas un point marqué de \check{H} . On a $\check{\nu}(-y_0) \leq \check{\nu}(y_1) + 1 \leq 2$, donc c'est un point ordinaire ou une extrémité. Mais, si c'était une extrémité, ce serait un point marqué. C'est donc un point ordinaire ($\check{\nu} = 2$), *i.e.* un point non remarquable. Soit α le premier point remarquable après $-y_0$ en venant de y_0 . L'application $\check{f}|_{[\alpha, y_0]}$ est injective sur $[\alpha, -y_0]$ et constante sur $[-y_0, y_0]$.

On peut trouver une application continue $F : \check{H} \rightarrow \check{H}$ qui coïncide avec \check{f} (donc avec f) sur $\check{H} \setminus]\alpha, y_0[$, et au voisinage de α , et qui est injective sur $[\alpha, y_0]$ avec $F([\alpha, y_0]) = \check{f}([\alpha, +y_0]) = \check{f}([\alpha, -y_0])$. Comme \check{f} est injective sur chacune des 2 composantes de $\check{H} \setminus]-y_0, y_0[$, l'application F est injective sur chacune des composantes de \check{H} coupé en y_0 . On a bien sûr $F(y_n) = y_{n+1}$ pour tout n . Par suite, \check{H} est un arbre de Hubbard abstrait. Cqfd.

8. Arguments externes de y_1

Proposition 9

a) *Si y_1 est strictement prépériodique, les arguments externes de y_1 sont les mêmes dans H et dans \check{H} .*

b) Si y_1 est périodique, tout argument externe de y_1 dans H appartient à $I(\check{H}) = [\arg_-(\check{H}), \arg_+(\check{H})]$.

c) Si y_1 est périodique, les arguments dans H des accès à y_1 adjacents à $[y_1, x_1]$ sont associés à H .

Démonstration. — Posons $\tilde{H} = \check{H} \cup [\beta, -\beta]$. L'application $\hat{F} : \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$ qui coïncide avec F sur \check{H} et avec f (et \check{f}) sur $[\beta, -\beta] \setminus \check{H}$ est injective sur chacune des composantes de \tilde{H} coupé en y_0 , prolonge F et applique β et $-\beta$ sur β . Par suite, \tilde{H} n'est autre que l'arbre obtenu en complétant \check{H} (cf. VII).

a) L'orbite directe de y_1 ne rencontre pas $[\delta, -\delta]$, donc au voisinage de chacun de ses points, F coïncide avec f . L'arbre H qu'on obtient en faisant bourgeonner \tilde{H} , comme indiqué en VII (paragraphe 4) s'identifie à un voisinage de \check{H} dans H . Si ξ est un accès à y , relativement à H , ou à \check{H} ce qui revient au même, les $f^n(\xi)$ et $F^n(\xi)$ coïncident, donc les chiffres du développement en base 2 sont les mêmes pour les arguments de ξ relativement à H et \check{H} .

b) Notons Θ l'ensemble des arguments externes de y_1 dans H (i.e. dans K). Notons θ_- et θ_+ le plus petit et le plus grand élément de Θ , et soit $\theta \in \Theta$. Soit χ la période de y_1 , et pour tout $t \in [0, 1[$ muni d'un développement en base 2 soit $\varepsilon_i(t)$ le i -ème chiffre après la virgule de ce développement.

Les arguments $\check{\theta}_- = \arg_-(\check{H})$ et $\check{\theta}_+ = \arg_+(\check{H})$ sont caractérisés par le fait qu'ils ont un développement périodique de période χ , avec $\varepsilon_i(\check{\theta}_-) = \varepsilon_i(\theta_-)$ et $\varepsilon_i(\check{\theta}_+) = \varepsilon_i(\theta_+)$ pour $1 \leq i \leq \chi$. Pour chaque $s \in \mathbb{N}$, on a $2^{s\chi}\theta \in \Theta$, donc $(\varepsilon_{s\chi+1}(\theta), \dots, \varepsilon_{s\chi+\chi}(\theta))$ est compris entre $(\varepsilon_{s\chi+1}(\theta_-), \dots, \varepsilon_{s\chi+\chi}(\theta_-))$ et $(\varepsilon_{s\chi+1}(\theta_+), \dots, \varepsilon_{s\chi+\chi}(\theta_+))$. Par suite $\check{\theta}_- \leq \theta \leq \check{\theta}_+$.

c) Soit χ la période de y_1 . Posons $q = \nu_{Z_{k-1}}(y_1)$ et définissons p_1 par la condition que le brin $[y_1, x_1]$ est le p_1 -ème après $[y_1, \beta]$ en tournant dans le sens direct. Soit z_1 un point sur $]y_1, x_1[$ voisin de y_1 , posons $z_n = f^{n-1}(z_1)$ pour $n \leq \chi q + 1$. Le point $z_{\chi q + 1}$ est aussi sur $]y_1, x_1[$.

Notons \check{H}_1 l'enveloppe connexe de $\{z_1, \dots, z_{\chi q}\}$ dans Z_{k-1} . Définissons α comme dans la démonstration de la proposition 8. On peut construire $F_1 : Z_{k-1} \rightarrow Z_{k-1}$ coïncidant avec f sur $Z_{k-1} \setminus]y_0, \alpha[$, ainsi que sur chacun des $[y_i, z_{i+sq}]$ pour $0 \leq i \leq \chi - 1$ et q tel que $1 \leq i + sq \leq kq - 1$, avec $F_1(z_{\chi q}) = z_1$, et F_1 injective sur chacune des composantes de \check{H}_1 coupé en $z_0 = z_{\chi q}$.

L'arbre \check{H}_1 est un arbre de Hubbard abstrait, qui s'identifie à l'arbre obtenu à partir de \check{H} par bifurcation d'argument p/q_1 . Comme en (a), les arguments de x_1 sont les mêmes dans H et dans \check{H}_1 . Les arguments des accès adjacents à $[x_1, z_1]$ (i.e. à $[x_1, y_1]$) sont donc $\arg_-(\check{H}_1)$ et $\arg_+(\check{H}_1)$, ils sont associés à \check{H} . Cqfd.

9. Démonstration du théorème

Notons θ_- et θ_+ le plus petit et le plus grand argument externe de y_1 dans K (ou dans Z_{k-1} , c'est pareil). Notons θ' et θ'' les arguments externes des accès à y_1 relativement à Z_{k-1} adjacents à $[y_1, x_1]$, avec $\theta' < \theta''$. On a donc $\theta_- \leq \theta' < \theta'' \leq \theta_+$. Les arguments θ' et θ'' sont associés à \check{H} .

L'argument externe de x_1 dans K est τ et on a $\theta' < \tau < \theta''$. Pour tout $\tau' = p'/2^{k'}$ avec $k' < k$, le point $\gamma(\tau')$ de K , d'argument externe τ' , est une extrémité de Z_{k-2} , donc $\tau' \notin [\theta', \theta'']$. L'argument τ est donc le chef-lieu de $[\theta', \theta'']$.

Le point y_1 n'est pas un point extrémal de Z_{k-2} , donc il existe un point extrémal $\zeta \in Z_{k-2}$ tel que $y_1 \in]\beta, \zeta[$. On a $\arg_K(\zeta) \in [\theta_-, \theta_+]$, et $\arg_K(\zeta)$ est de la forme $p' \cdot 2^{k'}$ avec $k' < k$ (proposition 1). Par suite, τ n'est pas le chef-lieu de $[\theta_-, \theta_+]$.

On a $I(\check{H}) \supset [\theta_-, \theta_+] \supset [\theta', \theta'']$, donc τ appartient à $I(H)$ sans en être le chef-lieu. Cqfd.

EXPOSÉ XXII

ADRESSES

1. Origine d'une nervure

Nous gardons les notations des deux exposés précédents. \mathcal{H} est l'ensemble des classes d'isomorphisme d'arbres de Hubbard abstraits. Pour chaque $H \in \mathcal{H}$, on a défini les arguments associés et l'intervalle $I(H) = [\arg_-(H), \arg_+(H)]$.

Ceci permet de définir des nervures en termes d'arbres : pour $\tau = p/2^k$ avec $k > 0$,

$$N_{\mathcal{H}}(\tau) = \{H \in \mathcal{H} \mid (\exists \theta', \theta'' \text{ associés à } H) \tau \text{ est le chef-lieu de } [\theta', \theta'']\}$$

$$N_{\mathcal{H}}^*(\tau) = \{H \in \mathcal{H} \mid \tau \text{ est le chef-lieu de } I(H)\}.$$

Nous avons montré dans XXI le théorème suivant :

Théorème 1 $_{\mathcal{H}}$. — *Pour tout τ de la forme $p/2^k$ avec $k > 0$, il existe un arbre $\check{H} \in N_{\mathcal{H}}(\tau) \setminus N_{\mathcal{H}}^*(\tau)$.*

Mais nous ne savons pas si le \check{H} ainsi construit est bien l'arbre d'un point c de $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$.

Cependant, nous allons montrer le

Théorème 2. — *Il existe $c \in \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$ tel que tout argument associé à \check{H} soit associé à c .*

Nous en déduisons aussitôt le

Théorème 1 $_{\mathcal{D}}$. — *Pour tout $\tau = p/2^k$, $k > 0$, la nervure $N_{\mathcal{D}}(\tau)$ a une origine.*

La nervure $N_{\mathcal{D}}(0)$ se compose des points 0 et 1/4. Nous conviendrons que 1/4 est l'origine de $N_{\mathcal{D}}(0)$, bien qu'il appartienne à $N_{\mathcal{D}}^*(0)$. Dans la suite, nous écrirons N pour $N_{\mathcal{D}}$.

Nous appellerons arguments propres d'un arbre abstrait H ses arguments associés s'il est pré périodique, mais seulement les arguments $\arg_-(H)$ et $\arg_+(H)$ s'il est périodique; pour $c \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, les arguments propres de l'arbre f_c sont les arguments associés à c , c'est-à-dire les arguments externes de c dans M .

Nous fixerons un $\tau = p/2^k$, $k > 0$; nous noterons c_τ le point de M d'argument externe τ , H l'arbre de Hubbard de f_{c_τ} .

Construction du point annoncé au théorème 2. — On prend les arguments propres $\theta_1 \dots \theta_n$ de \check{H} ; on regarde les points de $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$ plus petits que c_τ (au sens de la relation $<$ de (XX, 4)) dont l'arbre admet un $2^i \theta_j$ ($i \geq 0$, $1 \leq j \leq n$) pour argument propre. Ceux-ci sont en nombre fini; comme l'ensemble des points de $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_2$ plus petits que c_τ est totalement ordonné (XX, prop. 3, cor. 1), il y a un plus grand élément c parmi les points avant c_τ dont l'arbre admet un $2^i \theta_j$ pour argument propre: nous montrerons que c répond à l'énoncé du théorème 2.

Pour $c_1 \in M$, \sim_{c_1} désigne la relation d'équivalence sur \mathbb{Q}/\mathbb{Z} définie par

$$\theta \sim_{c_1} \theta' \iff \theta \text{ et } \theta' \text{ sont arguments externes du même point de } K_{c_1}.$$

Nous allons maintenant montrer comment \check{H} permet de définir une relation \sim_H sur

$$A = \{2^i \theta_j \mid i \geq 0, 1 \leq j \leq n\} \cup \{\frac{1}{2} + 2^i \theta_j \mid i \geq 0, 1 \leq j \leq n\}.$$

La construction de l'arbre complété de \check{H} au début de la démonstration de la proposition 9 de XXI et l'algorithme décrit dans XVIII § 3, permettent, pour tout point pré périodique de \check{H} , de définir des « arguments combinatoires associés » rationnels.

Contrairement à ce qui se produit dans les ensembles de Julia, il se peut que deux points distincts de H aient des arguments combinatoires égaux.

Pour $\theta, \theta' \in A$, on posera $\theta \sim_{\check{H}} \theta'$ lorsqu'il existe un point de \check{H} de la forme y_i ou $-y_i$ admettant α et α' pour arguments combinatoires. (Nous ne prétendons pas pour l'instant que $\sim_{\check{H}}$ est une relation d'équivalence.)

On a défini y_i pour tout $i \geq 0$ avec $y_{i+1} = f(y_i)$, f étant la dynamique sur \check{H} ; pour $i \geq 1$ dans le cas pré périodique, $i \geq 0$ dans le cas périodique, y_i est aussi un point bien défini de H .

La proposition suivante complète la proposition 9 de XXI :

Proposition 1

a) Tous les éléments de A sont arguments externes de points y_i ou $-y_i$ ($i \geq 1$) de H .

b) Pour tout $i > 0$, les arguments combinatoires de y_i dans \check{H} sont des arguments externes de y_i dans H .

Démonstration

a) θ_j est un argument externe de y_1 ($1 \leq j \leq n$), donc pour $i \geq 0$, $2^i \theta_j$ est un argument externe de y_{i+1} ; $\frac{1}{2} + 2^i \theta_j$ est alors un argument externe de $-y_i$.

b) Dans le cas prépériodique comme dans le cas périodique, avec les notations de XXI, $y_i \notin [-\delta, \delta]$ et on peut recopier la preuve de XXI, proposition 9 a). Cqfd.

Corollaire. — $\sim_H = (\sim_{c_\tau})|_A$.

On notera $\gamma_M(\alpha)$ le point de M d'argument externe α pour $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Lemme 1. — Soit U la composante connexe de $M \setminus \{\gamma_M(2^i \theta_j) \mid i \geq 0, 1 \leq j \leq n\}$ contenant c_τ . Sur U , $(\sim_c)|_A$ est constante.

Démonstration. — Soient $\theta, \theta' \in A$. Montrons que l'ensemble des $c_1 \in U$ tels que $\theta \sim_{c_1} \theta'$ est ouvert et fermé dans U .

Il est *fermé* car $\theta \sim_{c_1} \theta' \iff \gamma_{c_1}(\theta) = \gamma_{c_1}(\theta')$ où $\gamma_{c_1}(\theta)$ (resp. $\gamma_{c_1}(\theta')$) désigne l'aboutissement du rayon d'argument θ (resp. θ') dans K_{c_1} , et $\gamma_{c_1}(\theta)$ comme $\gamma_{c_1}(\theta')$ est une fonction continue de c_1 (cf. XVII; on n'utilise ici en fait que le cas « facile » du théorème).

Il est *ouvert* car par le choix des points retirés à M , $\gamma_{c_1}(2^i \theta_j)$ ou $\gamma_{c_1}(\frac{1}{2} + 2^i \theta_j)$ (pour $i \geq 0, 1 \leq j \leq n$) est prépériodique répulsif et pas dans l'orbite inverse de zéro pour f_{c_1} , donc il n'existe au voisinage de c_1 qu'une détermination prépériodique du même type possible pour la fonction continue $\gamma_{c_1}(2^i \theta_j)$ ou $\gamma_{c_1}(\frac{1}{2} + 2^i \theta_j)$. Cqfd.

Lemme 2

- Si c est périodique, $(\sim_{c_\tau})|_A = (\sim_c)|_A$.
- Si c est strictement prépériodique, le graphe de $(\sim_c)|_A$ contient celui de $(\sim_{c_\tau})|_A$.

Démonstration

– Dans le cas périodique, U définie au lemme 1 contient c , car sans cela l'un des points $\gamma_M(2^i \theta_j)$ ($i \geq 0, 1 \leq j \leq n$) serait compris entre c et c_τ au sens de la relation d'ordre sur \mathcal{D} , ce qui contredirait la construction de c . Dès lors, le lemme 1 entraîne $(\sim_{c_\tau})|_A = (\sim_c)|_A$.

– Dans le cas strictement prépériodique, on peut seulement dire que $c \in \overline{U}$ par le même raisonnement; les relations $\alpha \sim \alpha'$ ouvertes en c (i.e. $\alpha \not\sim_c \alpha'$) le restent au voisinage de c donc dans U , d'où l'inclusion annoncée. Cqfd.

Remarque. — Ce qui peut se produire dans ce cas, c'est, si c est de la forme $\gamma_M(2^i \theta_j)$ avec $i_o > 0$ et $1 \leq j \leq n$, que les $2^{i_o} \theta_j$ et les $\frac{1}{2} + 2^{i_o} \theta_j$, non liés pour \sim_{c_0} se regroupent pour \sim_c ; pour $i < i_o$, les $2^i \theta_j$ et les $\frac{1}{2} + 2^i \theta_j$ aboutissent dans K_c en des points opposés, donc ne se lient pas mutuellement.

On en déduit donc, compte tenu du corollaire de la proposition 1 :

Corollaire. — Si c est dans \mathcal{D}_0 , $\sim_H = (\sim_c)|_A$.

Preuve du théorème 2

Cas où H est périodique. — Il y a ici seulement deux θ_j : θ_1 et θ_2 , qui sont à dénominateur impair. Par définition de c , un argument propre au moins de l'arbre associé à c est de la forme $2^i\theta_j$ ($i \geq 0, j = 1, 2$); quitte à renuméroter θ_1 et θ_2 , nous supposons que c'est $2^i\theta_1$ qui est dénominateur impair : c est donc dans \mathcal{D}_0 .

Vu la construction purement arithmétique des arguments associés à un arbre périodique en fonction des arguments propres faite en XVIII, §3, il suffit de montrer que l'arbre associé à c et \check{H} ont mêmes arguments propres. Puisqu'il est égal à l'arbre associé à c (cf. XVIII prop. 1 et 2), on pourra regarder l'arbre à la racine c_1 de la composante hyperbolique de M dont c est le centre.

— *Cas où c_1 est racine d'une composante primitive* (i.e. la valeur propre du cycle indifférent rationnel est 1). Dès lors, tout rayon aboutissant au point du cycle indifférent rationnel qui attire c_1 dans K_{c_1} fournit un argument propre de c_1 ; puisqu'il arrive deux rayons externes de M en c_1 , il y a exactement deux tels rayons. On a $2^{i_0}\theta_1 \sim_{\check{H}} 2^{i_0}\theta_2$, donc $2^{i_0}\theta_1 \sim_{c_1} 2^{i_0}\theta_2$ et les arguments propres de l'arbre de c_1 sont donc $2^{i_0}\theta_1$ et $2^{i_0}\theta_2$ pour un $i_0 \geq 0$. Il reste à montrer que $i_0 = 1$: sur un cercle, joignons par un segment le point d'argument $2^i\theta_1$ et le point d'argument $2^i\theta_2$ d'une part, le point d'argument $\frac{1}{2} + 2^i\theta_1$ et le point d'argument $\frac{1}{2} + 2^i\theta_2$ d'autre part, pour chaque i . Si k est la période de θ_1 ou θ_2 pour la multiplication par 2, i_0 se reconnaît à ce que les segments de $2^{i_0+k-1}\theta_1$ à $2^{i_0+k-1}\theta_2$ et de $\frac{1}{2} + 2^{i_0+k-1}\theta_1$ à $\frac{1}{2} + 2^{i_0+k-1}\theta_2$ délimitent une région qui contient le centre du cercle; or c'est précisément le cas pour $i_0 = 1$ (les rayons d'arguments $2^k\theta_1, 2^k\theta_2, \frac{1}{2} + 2^k\theta_1$ et $\frac{1}{2} + 2^k\theta_2$ aboutissant dans H en δ et $-\delta$ avec les notations de XXI).

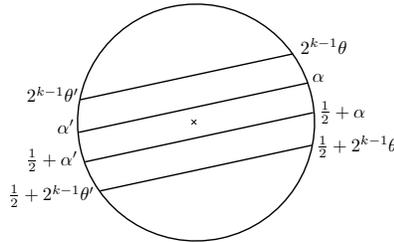
θ_1 et θ_2 sont bien les arguments propres de c_1 .

— *Cas où c_1 n'est pas primitive.* Ici f_{c_1} agit transitivement sur les rayons aboutissant aux points du cycle indifférent rationnel; comme $\theta_1 \sim_{\check{H}} \theta_2$, on a aussi $\theta_1 \sim_{c_1} \theta_2$, donc θ_2 est de la forme $2^a\theta_1$ pour un $a \geq 0$. Comme dans le cas où c_1 est primitive, joignons par un segment les $2^i\theta_1$ aux $2^i\theta_2$ et les $\frac{1}{2} + 2^i\theta_1$ aux $\frac{1}{2} + 2^i\theta_2$. Là encore les segments de $2^k\theta_1$ à $2^k\theta_2$ et $\frac{1}{2} + 2^k\theta_1$ à $\frac{1}{2} + 2^k\theta_2$ délimitent une région qui contient le centre du cercle, ce qui montre que ce sont bien θ_1 et θ_2 qui sont dans K_{c_1} les rayons adjacents au pétale contenant c_1 , et ce sont bien les arguments propres de c_1 .

Cas où H est strictement préperiodique. — Comme dans le cas précédemment traité, joignons sur un cercle les points d'arguments α et α' pour tout couple α, α' de points de A équivalents par \sim_H , et qui sont donc aussi équivalents pour \sim_c (cf. lemme 2).

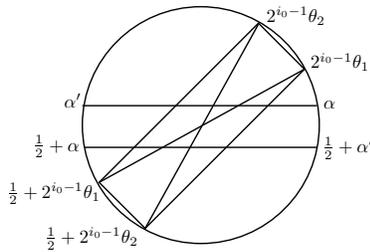
— *Cas où $c \in \mathcal{D}_0$.* On va montrer que ce cas ne peut se produire. Il ne suffit pas ici de regarder $\sim_{\check{H}}$, mais il faut revenir à \sim_{c_τ} , égale à \sim_c sur A d'après le lemme 2. On peut alors, dans le schéma auxiliaire, ajouter des segments entre les arguments externes de δ (resp. $-\delta$). Comme δ et $-\delta$ sont de part et d'autre de zéro sur H (cf. XXI, §5 : il n'y a pas de point de branchement de Z_{k-1} sur $] -\delta, \delta[$), on peut donc trouver α et

α' tels que 2α et $2\alpha'$ soient un θ_j et un $\theta_{j'}$ ($1 \leq j \leq n$, $1 \leq j' \leq n$), dont les rayons associés aboutissent dans K_{c_τ} en δ , et tels que sur le schéma auxiliaire, les segments de α à α' et de $\frac{1}{2} + \alpha$ à $\frac{1}{2} + \alpha'$ séparent le centre du cercle de tous les segments correspondant à $(\sim_{\check{H}})_{|A}$. On a alors la situation suivante :



Si θ et θ' sont les arguments propres de l'arbre de c , et k l'ordre du cycle de f_c , on a alors une absurdité, car le raisonnement du lemme 1 montre que $\mathcal{R}(K_c, \alpha)$ et $\mathcal{R}(K_c, \alpha')$ aboutissent encore en un même point, qui devra être sur l'arc réglementaire dans K_c joignant les aboutissements de $\mathcal{R}(K_c, 2^{k-1}\theta)$ et $\mathcal{R}(K_c, \frac{1}{2} + 2^{k-1}\theta)$; mais cet arc est dans $\overset{\circ}{K}_c$, d'où une contradiction.

- Cas où $c \in \mathcal{D}_2$. On peut définir α et α' comme ci-dessus. Si un $2^i\theta_j$ ($1 \leq j \leq n$, $i \geq 0$) est argument propre de l'arbre de c , tous les autres $2^i\theta_{j'}$ ($1 \leq j' \leq n$) le sont aussi, puisqu'ils sont \sim_c équivalents à $2^i\theta_j$. Supposons que ce soit le cas pour un $i_0 > 0$. D'après la remarque qui suit le lemme 2, tous les $2^{i_0-1}\theta_j$ et les $\frac{1}{2} + 2^{i_0-1}\theta_j$ ($1 \leq j \leq n$) sont alors \sim_c équivalents. On a donc une situation :



Comme la relation \sim_c est non croisée, cela impose que $\mathcal{R}(K_c, \alpha)$ aboutisse aussi en zéro, ce qui est impossible puisque $2^{i_0-1}\theta_j$ est de la forme $2^p\alpha$ avec $p \neq 0$ et 0 n'est pas périodique pour f_c .

Comme un $2^i\theta_j$ ($i \geq 0$, $1 \leq j \leq n$) au moins est argument associé à c par choix de c , les θ_j ($1 \leq j \leq n$) sont bien des arguments propres de l'arbre de c . Cqfd.

2. Adresses finies

Soit c un point de \mathcal{D} . Une *adresse finie* pour c est une suite finie

$$(c_0, \tau_0, c_1, \tau_1, \dots, c_{r-1}, \tau_{r-1}, c_r)$$

telle que :

- (a) $c_0 = 1/4$; $\tau_0 = 0$ et $c_1 = 0$ si $r \geq 1$.
- (b) $c_r = c$.
- (c) c_i est l'origine de $N(\tau_i)$ pour $i = 0, \dots, r-1$.
- (d) $c_{i+1} \in N^*(\tau_i)$ pour $i = 0, \dots, r-1$.

Proposition 2. — Soit $c \in \mathcal{D}$ tel que $I(c)$ ne soit pas réduit à un point, ou soit de la forme $\{p/2^k\}$. Alors, c admet une adresse finie unique.

Démonstration. — Posons $c'_0 = c$, et définissons c'_i, τ'_i par récurrence. Pour tout i , τ'_i est le chef-lieu de $I(c'_i)$, et c'_{i+1} est l'origine de $N(\tau'_i)$. (Remarquons que les $I(c'_i)$ vont en croissant, de sorte que le chef-lieu de $I(c'_i)$ est défini pour tout i .) Le nombre τ'_i est de la forme $p'_i/2^{k'_i}$, et les k'_i vont en décroissant strictement jusqu'à ce qu'ils s'annulent. Il existe donc un r tel que $k'_{r-1} = 0$, i.e. $\tau'_{r-1} = 0$, d'où $c'_r = 1/4$. On pose alors $c_i = c'_{r-i}$ et $\tau_i = \tau'_{r-1-i}$, et $(c_0, \tau_0, \dots, \tau_{r-1}, c_r)$ est une adresse finie de c . Il est clair qu'une adresse finie de c est nécessairement obtenue ainsi, d'où l'unicité. Cqfd.

Remarques

1) Soit $c \in \mathcal{D}$ ayant pour adresse $(c_0, \tau_0, c_1, \tau_1, \dots, c_r)$. On a $c_0 < c_1 < \dots < c_r$. L'ensemble des points antérieurs à c est $[c_0, c_1]_{N(\tau_0)} \cup \dots \cup [c_{r-1}, c_r]_{N(\tau_{r-1})}$. Si $c' \in]c_{i-1}, c_i]$, le point c' admet pour adresse $(c_0, \tau_0, \dots, c_{i-1}, \tau_{i-1}, c')$.

2) On peut définir des adresses infinies, en remplaçant la condition (b) par (b') : $\cap I(c_r) = I(c)$. On peut alors démontrer que tout point de \mathcal{D} admet une adresse finie ou infinie.

3. Point de séparation

Proposition 3. — Soient c et c' deux points de \mathcal{D} satisfaisant aux conditions de la proposition 2. Alors, c et c' admettent dans \mathcal{D} une borne inférieure $c'' = c \wedge c'$.

Démonstration. — Soient $(c_0, \tau_0, \dots, c_r)$ et $(c'_0, \tau'_0, \dots, c'_r)$ les adresses de c et c' respectivement, et soit k le plus grand i tel que $\tau_i = \tau'_i$. Les points c_{k+1} et c'_{k+1} appartiennent à la nervure stricte $N^*(\tau_i)$, donc sont comparables; soit c'' le premier des deux. Il est clair que c'' est le plus grand minorant commun à c et c' . Cqfd.

Remarque. — L'hypothèse que c et c' satisfont aux conditions de la proposition 1 n'est pas essentielle : on peut s'en passer en considérant éventuellement des adresses infinies.

Proposition 4. — Soient c et c' deux points de \mathcal{D} satisfaisant aux conditions de la proposition 1, et posons $c'' = c \wedge c'$. On suppose c et c' non comparables (i.e. $c \not\leq c'$ et $c' \not\leq c$, de sorte que $c'' < c'$ et $c'' < c$). Il existe alors trois arguments $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ associés à c'' tels que, quitte à échanger c et c' , on ait

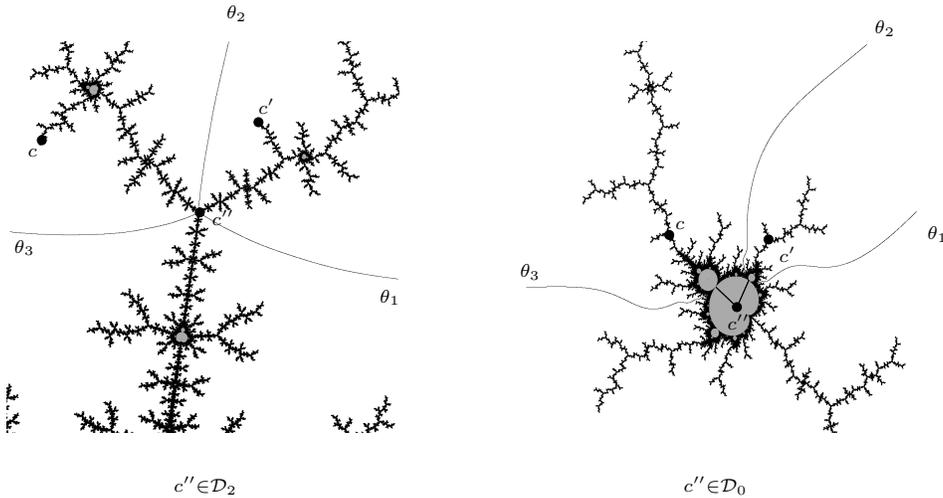
$$0 < \theta_1 < \arg_-(c) \leq \arg_+(c) < \theta_2 < \arg_-(c') \leq \arg_+(c') < \theta_3 < 1.$$

Démonstration. — Soient $(c_0, \tau_0, \dots, c_r = c)$ et $(c'_0, \tau'_0, \dots, c'_{r'} = c')$ les adresses de c et c' , et k le plus grand i tel que $\tau_i = \tau'_i$. On a $c'' \in N(\tau_k)$. Posons $\tau_* = \tau_{k+1}$ si $c'' = c_{k+1}$ et $\tau_* = \tau_k$ si $c'' < c_{k+1}$, et définissons de même τ'_* . On a $c'' \in N(\tau_*)$ et $c'' \in N(\tau'_*)$, donc il existe quatre arguments $\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, \theta_4^*$ associés à c'' tels que τ_* soit le chef-lieu de $[\theta_1^*, \theta_2^*]$ et τ'_* celui de $[\theta_3^*, \theta_4^*]$. On a alors $\theta_1^* < \arg_-(c) \leq \arg_+(c) < \theta_2^*$ et $\theta_3^* < \arg_-(c') \leq \arg_+(c') < \theta_4^*$. D'autre part, $\tau \notin [\theta_3^*, \theta_4^*]$ ou $\tau' \notin [\theta_1^*, \theta_2^*]$. Il en résulte que l'on peut extraire de $\{\theta_1^*, \theta_2^*, \theta_3^*, \theta_4^*\}$ trois arguments satisfaisant aux conditions requises. Cqfd.

Pour $c \in \mathcal{D}$ et θ un argument associé à c , on définit $\widehat{\mathcal{R}}(c, \theta)$ de la façon suivante : si $c \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, $\mathcal{R}(M, \theta)$ aboutit en c et on pose $\widehat{\mathcal{R}}(c, \theta) = \overline{\mathcal{R}(M, \theta)} = \mathcal{R}(M, \theta) \cup \{c\}$. Si $c \in \mathcal{D}_0$, c est le centre d'une composante hyperbolique W et $\mathcal{R}(M, \theta)$ aboutit en un point $c' \in \partial W$; on pose alors $\widehat{\mathcal{R}}(c, \theta) = \mathcal{R}(M, \theta) \cup [c, c']_{\overline{W}}$.

La proposition 3 admet comme complément :

Corollaire. — Soient $c, c', c'', \theta_1, \theta_2, \theta_3$ comme dans la proposition 3. Alors, c, c' et $\mathcal{R}(M, 0)$ sont contenus dans trois composantes connexes différentes de $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{i=1}^3 \widehat{\mathcal{R}}(c'', \theta_i)$.



4. L'implication MLC \implies HG2

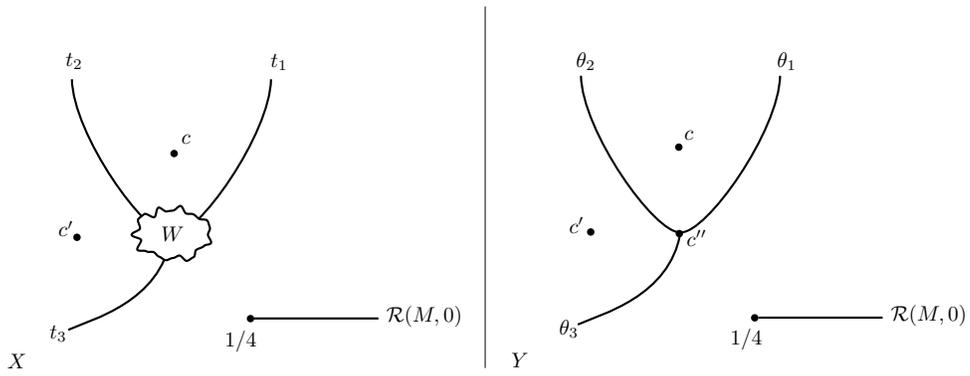
Théorème. — Si M est localement connexe, toute composante connexe de $\overset{\circ}{M}$ est hyperbolique.

Démonstration. — Supposons M localement connexe et soit W une composante connexe non hyperbolique de $\overset{\circ}{M}$. L'ensemble ∂W est infini non dénombrable, et comme \mathcal{D} est dénombrable, on peut trouver trois points x_1, x_2 et x_3 distincts dans $\partial W \setminus \mathcal{D}$. Le lacet de Carathéodory $\mathbb{T} \rightarrow \partial M$ est surjectif; on a $\partial W \subset \partial M$, donc on peut trouver t_1, t_2, t_3 tels que $\mathcal{R}(M, t_i)$ aboutisse en x_i . Quitte à permuter les x_i et les t_i , on peut supposer que $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$. Soient $\tau = p/2^k$ et $\tau' = p'/2^{k'}$ tels que :

$$(1) \quad 0 < t_1 < \tau < t_2 < \tau' < t_3 < 1 ;$$

notons c et c' les points d'aboutissement de $\mathcal{R}(M, \tau)$ et $\mathcal{R}(M, \tau')$, et posons $c'' = c \wedge c'$ (les points c et c' satisfont aux hypothèses de la proposition 1). Comme c et c' sont maximaux dans \mathcal{D} , ils sont non comparables. D'après la proposition 3 et son corollaire, on peut trouver trois arguments $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ associés à c'' tels que c, c' et $\mathcal{R}(M, 0)$ soient dans trois composantes distinctes de $\mathbb{C} \setminus Y$, où $Y = \bigcup_{i=1}^3 \widehat{\mathcal{R}}(c'', \theta_i)$. Posons $X = W \cup \bigcup_{i=1}^3 \mathcal{R}(M, t_i) \cup \{x_i\}$. L'ensemble X est connexe. On a $X \cap Y = \emptyset$: en effet, les points de X dans $\mathbb{C} \setminus M$ ont des arguments externes irrationnels tandis que ceux des points de $Y \cap (\mathbb{C} \setminus M)$ sont rationnels, $X \cap \partial M \subset \partial W \setminus \mathcal{D}$ et $Y \cap \partial M \subset \mathcal{D}$, $X \cap \overset{\circ}{M} \subset W$ non hyperbolique tandis que $Y \cap \overset{\circ}{M}$ est vide ou contenu dans une composante hyperbolique de centre c'' . La relation (1) montre que c, c' et $\mathcal{R}(M, 0)$ sont dans trois composantes connexes distinctes de $\mathbb{C} \setminus X$.

Soient U la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus X$ contenant Y et V la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus Y$ contenant X . Toute composante connexe de $\mathbb{C} \setminus X$ autre que U est contenue dans V , donc V contient au moins deux des trois ensembles $\{c\}, \{c'\}$ et $\mathcal{R}(M, 0)$. Contradiction. Cqfd.



Impossible à réaliser avec $X \cap Y = \emptyset$.

EXPOSÉ XXIII

RESSEMBLANCE ENTRE L'ENSEMBLE DE MANDELBROT ET L'ENSEMBLE DE JULIA AU VOISINAGE D'UN POINT DE MISUREWICZ

TAN LEI

1. Notation et énoncé. Introduction

Soit K_c l'ensemble de Julia rempli de $f_c : z \mapsto z^2 + c$. Soit M l'ensemble de Mandelbrot, *i.e.* M est l'ensemble de c tels que $0 \in K_c$. On rappelle que $c_0 \in M$ est un point de Misurewicz si le point 0 est strictement prépériodique par f_{c_0} , c'est-à-dire s'il existe deux entiers $\ell > 0$ et $k > 0$ tels que $f_{c_0}^\ell(0) = f_{c_0}^{\ell+k}(0)$ mais $f_{c_0}^{\ell-1}(0) \neq f_{c_0}^{\ell+k-1}(0)$, et que $\rho_0 = (f_{c_0}^k)'(x)$ est la valeur propre du cycle $\{f_{c_0}^\ell(0), f_{c_0}^{\ell+1}(0), \dots, f_{c_0}^{\ell+k-1}(0)\}$. En vertu du théorème 1 de XIII et de ses compléments, on sait que les arguments externes de c_0 dans M sont ceux de c_0 dans K_{c_0} . Dans ce mémoire, on va chercher une relation géométrique entre M et K_{c_0} au voisinage de c_0 . Plus précisément, on aura :

Théorème. — Soient $c_0 \in M$ un point de Misurewicz et ρ_0 la valeur propre du cycle sur lequel tombe 0, alors il existe un sous-ensemble fermé Z de \mathbb{C} avec $\rho_0 Z = Z$ et $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tels que $\rho_0^n \tau_{-c_0}(K_{c_0}) \rightarrow Z$ et

$$\rho_0^n \tau_{-c_0}(M) \longrightarrow \lambda Z$$

lorsque n tend vers ∞ .

Ici, τ_{-c_0} est la translation de $-c_0$; le sens de la convergence sera précisé au § 2.

Comme hypothèse générale de ce mémoire, on suppose toujours que $c_0 \in M$ est un point de Misurewicz et α_0 le premier point du cycle sur lequel tombe 0. On notera ℓ le plus petit entier positif tel que $f_{c_0}^\ell(0) = \alpha_0$ et k la période du cycle. On rappelle que K_{c_0} est d'intérieur vide et que le point périodique α_0 est répulsif (*i.e.* $|\rho_0| > 1$). Le théorème ci-dessus est la conjonction du théorème 1 du § 3 et du théorème 2 du § 5.

2. Distance de Hausdorff

Soit E un espace métrique localement compact à boules fermées compactes (*i.e.* pour $a \in E$, $R \in \mathbb{R}^+$, la boule fermée $B(a, R)$ est compacte) avec une métrique d . Notons F l'ensemble des sous-ensembles fermés de E et F_1 l'ensemble des voisinages fermés de ∞ de E .

Définition 1. — Pour $A, B \subset E$ fermés « voisinages de ∞ » *i.e.* $E \setminus A$ et $E \setminus B$ sont relativement compacts, on définit $\delta(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y)$ et une distance $D(A, B) = \sup\{\delta(A, B), \delta(B, A)\}$.

Comme il existe $x_0 \in E$ et $R \in \mathbb{R}^+$ tel que $E \setminus B(x_0, R) \subset A \cap B$, les deux fonctions $x \mapsto d(x, A)$ et $y \mapsto d(y, B)$ sont continues à support compact. Donc $\delta(A, B)$ et $\delta(B, A)$ sont bien définies. Si C est un autre voisinage fermé de ∞ , pour tout $z \in C$, on a

$$\begin{aligned} \delta(A, B) &= \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) \leq \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} (d(x, y) + d(z, y)) \\ &= \sup_{x \in A} d(x, z) + \inf_{y \in B} d(z, y) \leq \sup_{x \in A} d(x, z) + \delta(C, B). \end{aligned}$$

Comme $E \setminus C$ est relativement compact, il existe $z_x \in C$ tel que $d(x, z_x) = d(x, C)$ pour tout $x \in A$ donc

$$\delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B) \leq D(A, C) + D(C, B).$$

Idem pour $\delta(B, A)$. Tout cela implique

$$D(A, B) \leq D(A, C) + D(C, B).$$

De plus, $\delta(A, B) = 0$ implique $A \subset B$, et $\delta(B, A) = 0$ implique $B \subset A$, donc une condition nécessaire et suffisante pour $D(A, B) = 0$ est $A = B$. Cela nous dit que D est une distance bien définie sur F_1 .

Fixons un point $x \in E$.

Définition 2. — Pour $A, B \subset E$ fermés quelconques, et un réel positif R , on définit $A_R = A \cup (E \setminus \overset{\circ}{B}(x_0, R))$ et $B_R = B \cup (E \setminus \overset{\circ}{B}(x_0, R))$. Comme A_R et B_R sont dans F_1 , on peut définir aussi

$$d_R(A, B) = D(A_R, B_R).$$

Définition 3. — Soit $\{A_n\}$ une suite dans F et $A \in F$. On dit $A_n \rightarrow A$ si pour tout $R > 0$, $d_R(A_n, A) \rightarrow 0$. Soient S un espace métrique et $X : s \rightarrow X(s)$ une application de S dans F . On dit que X est semi-continue supérieurement (s.c.s.) au point s_0 si pour tout $R > 0$ et pour toutes les suites $\{s_n\}$ dont $s_n \rightarrow s_0$ on a $\delta(X_R(s_n), X_R(s_0)) \rightarrow 0$. Par contre, on dit que X est semi-continue inférieurement (s.c.i.) au point s_0 si $\delta(X_R(s_0), X_R(s_n)) \rightarrow 0$ pour tout $R > 0$ et pour toutes les suites $\{s_n\}$ telles que $s_n \rightarrow s_0$. On dit que X est continue au point s_0 si elle est en même temps s.c.s. et s.c.i. à ce point.

C'est le sens à donner à la convergence dans l'énoncé du théorème du §1.

Proposition 2.1. — Soient E un espace métrique localement compact à boules fermées compactes, S un espace métrique et $X \subset S \times E$. On note $X(s)$ pour $s \in S$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $(s, x) \in X$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) X est fermé dans $S \times E$
- 2) pour tout $s \in S$, $X(s)$ est fermé dans E et l'application $s \mapsto X(s)$ est s.c.s. en ce point.

Démonstration. — Fixons un point x_0 dans E pour tout $R > 0$. La boule fermée $B(x_0, R)$ est compacte dans E par hypothèse. X est fermé dans $S \times E$ si et seulement si $X \cap S \times B(x_0, R)$ est fermé dans $S \times B(x_0, R)$ pour tout $R > 0$. Donc on se ramène au cas que E est un espace compact.

1) \implies 2). De E compact et X fermé, on déduit directement que $X(s)$ est fermé pour $s \in S$. Si X n'est pas s.c.s. au point s_0 , alors $\exists x_n \in X(s_n)$ avec $s_n \rightarrow s_0$ et $x_n \rightarrow x_0$ tels que $d(x_n, X(s_0)) \geq \varepsilon_0$, où ε_0 est une constante (pour tout n), donc $d(x_0, X(s_0)) \geq \varepsilon_0/2$, contradiction avec $(s_0, x_0) \in X$.

2) \implies 1). Supposons qu'il existe $\{(x_n, s_n)\} \subset X$ avec $(x_n, s_n) \rightarrow (x_0, s_0)$ et que $(x_0, s_0) \notin X$. Comme $X(s_0)$ est fermé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d(x_0, X(s_0)) \geq 2\varepsilon_0$. Donc quand n est assez grand on a $d(x_n, X(s_0)) > \varepsilon_0$ cela induit $\delta(X(s_n), X(s_0)) > \varepsilon_0$, contradiction avec la semi-continuité supérieure de X au point s_0 . Cqfd.

Proposition 2.2. — Soient U, V deux voisinages de 0 dans \mathbb{C}^n et $\varphi : U \rightarrow V$ un isomorphisme de classe C_1 avec $\varphi(0) = 0$ et $T_0\varphi = T$ non singulier. Si $A \subset U$ est un sous-ensemble fermé et $B = \varphi(A)$, alors pour $\rho \in \mathbb{C}$ variable et pour tout $R > 0$ fixé, on a $d_R(\rho(TA), \rho B) \rightarrow 0$ quand $|\rho| \rightarrow \infty$.

($T : z \mapsto Tz$ est une application linéaire et $\rho : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\rho z_1, \dots, \rho z_n)$ est la multiplication par ρ).

Démonstration. — Pour démontrer $\delta((\rho(TA))_R, (\rho B)_R) \rightarrow 0$, il suffit de démontrer $\delta((\rho(TA) \cap \partial D_R), (\rho B) \cap D_R \cup \partial D_R) \rightarrow 0$, où $D_R = \overset{\circ}{B}(0, R)$. Le résultat est trivial quand $0 \notin A$.

Supposons $0 \in A$. Pour $\varepsilon > 0$, et $y \in \rho(TA) \cap D_R \cup \partial D_R$, si $d(y, \partial D_R) < \varepsilon$, alors $d(y, (\rho B)_R) < \varepsilon$. Sinon, prenons le point $z \in A$ tel que $y = \rho \cdot Tz$. Alors $\varphi(z) \in B$ et

$$\begin{aligned} d(y, \rho\varphi(z)) &= \|y - \rho\varphi(z)\| = |\rho| \cdot \|z\| \cdot \left\| \frac{\varphi(z) - Tz}{\|z\|} \right\| \\ &= \|\rho z\| \cdot \left\| \frac{\varphi(z) - Tz}{\|z\|} \right\| < R \|T^{-1}\| \cdot \left\| \frac{\varphi(z) - Tz}{\|z\|} \right\|. \end{aligned}$$

L'hypothèse $T \circ \varphi = T$ nous dit qu'il existe $N > 0$ et $\tau > 0$ tels que $|\rho| > N$ entraîne $|Z| = |T^{-1}(Tz)| < CR/|\rho| < \tau$ et puis $R\|(\varphi(z) - Tz)/z\| < \varepsilon/2$ où $C = \|T\|^{-1}$. Cette valeur de N ne dépend pas du choix de y . De $d(y, \rho\varphi(z)) < \varepsilon/2$; on a $\rho\varphi(z) \in D_R$. Donc $|\rho| > N$ nous donne $\delta((\rho(TA))_R, (\rho B)_R) < \varepsilon$. Idem pour $\delta((\rho B)_R, (\rho(TA))_R)$. Cqfd.

3. Le problème de la linéarisation

Pour $c_0 \in M$ point de Misurewicz, on a

Proposition 3.1. — *Il existe un voisinage W de c_0 dans \mathbb{C} tel que il y ait une fonction holomorphe $\alpha : W \rightarrow \mathbb{C}$ avec $\alpha(c_0) = \alpha_0$ et $f_c^k(\alpha(c)) = \alpha(c)$ pour tout $c \in W$. De plus, pour $\rho(c) = (f_c^k)'(\alpha(c))$*

$$\mu = \inf_{c \in W} |\rho(c)| > 1.$$

Démonstration. — Notons $F(c, z) = f_c^k(z) - z$. Alors $F(c_0, \alpha_0) = 0$ et $F'_z(c_0, \alpha_0) = (f_{c_0}^k)'(\alpha_0) - 1 \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites nous emmène à la proposition. Cqfd.

Lemme 1. — *Soient U, V deux voisinages de 0 dans \mathbb{C} et $f : U \xrightarrow{\sim} V$ une fonction holomorphe avec $f(0) = 0$ et $|f'(0)| < 1$. Alors il existe $U_1 \subset U$ tel que $f(U_1) \subset U_1$ et que $\{f^n(z)/f'(0)^n\}$ converge uniformément sur tout compact de U_1 .*

Démonstration. — On a d'abord

$$f(z) = f'(0)z + \frac{1}{2}f''(0)z^2 + O(|z|^2) = f'(0)z + f'(0)\omega(z)$$

où $|\omega(z)| < B|z|^2$ avec $B > (1/|f'(0)|) \cdot \frac{1}{2}|f''(0)|$. Pour $z_0 \in U$, notons $z_n = f^n(z_0) = f(z_{n-1})$, alors

$$\frac{f^{n+1}(z_0)}{(f'(0))^{n+1}} = z_0 \frac{f(z_0)}{f'(0)z_0} \cdot \frac{f(z_1)}{f'(0)z_1} \cdots \frac{f(z_n)}{f'(0)z_n} = z_0 \prod_{j=0}^n \left(1 + \frac{\omega(z_j)}{z_j}\right).$$

Si $z_0 \in D_R \subset U$, alors

$$|z_1| < (|f'(0)| + BR|f'(0)|)|z_0| = a|z_0|$$

où $a = |f'(0)| + BR|f'(0)|$. Pour que $a < 1$, il suffit $R < (1 - |f'(0)|)/B|f'(0)| = R_1$. Fixons $R_0 \in]0, R_1[$, on a $f(D_{R_0}) \subset D_{R_0}$. Si $z_0 \in D_{R_0}$, alors $|z_n| < a^n|z_0|$. Il en résulte que $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge uniformément sur tout compact de D_{R_0} , ainsi que $\sum_{n=0}^{\infty} \omega(z_n)/z_n$ car $|\omega(z_n)/z_n| < B|z_n|$. Cela induit que $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1 + \omega(z_n)/z_n)$ et puis $\prod(1 + \omega(z_n)/z_n)$ convergent uniformément sur tout compact de D_{R_0} . Cqfd.

Lemme 2 (Cas de grande dimension). — *Soit U un voisinage de (c_0, α_0) dans $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}^n \times C = \{(\lambda, z)\}$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ une fonction holomorphe avec $f(\lambda, z) = (\lambda, f_\lambda(z))$ et $f(c_0, \alpha_0) = (0, 0)$. Supposons $|f'_0(0)| < 1$. Alors la suite des fonctions $\varphi_n : (\lambda, z) \mapsto (\lambda, (f'_\lambda(\alpha(\lambda)))^{-n}(f_\lambda^n(z) - \alpha(\lambda)))$ converge sur une fonction holomorphe φ de $U_1 \subset U$ dans \mathbb{C}^{n+1} , où $\alpha(\lambda)$ est la solution implicite de l'équation $f_\lambda(z) - z = 0$. φ est de la forme $\varphi(\lambda, z) = (\lambda, \varphi_\lambda(z))$ avec $\varphi'_\lambda(\alpha(\lambda)) = 1$ et $\varphi_\lambda(f_\lambda(z)) = f'_\lambda(\alpha(\lambda))\varphi_\lambda(z)$.*

Démonstration. — La solution implicite α existe dans un voisinage de W de c_0 . Quitte à restreindre W , on peut supposer que $R_1(\lambda) = (1 - |f'_\lambda(\alpha)|)/B(\lambda)|f'(\alpha(\lambda))|$ est une fonction continue positive sur W , où $B(\lambda)$ est une fonction continue sur W vérifiant

$B(\lambda) > (1/|f'_\lambda(\alpha(\lambda))|)^{\frac{1}{2}}|f''_\lambda(\alpha(\lambda))|$. Donc $(f'_\lambda(\alpha(\lambda)))^{-n}(f_\lambda^n(z) - \alpha(\lambda))$ converge uniformément sur tout compact de $U_1 = \bigcup_{\lambda \in W} \{\lambda\} \times \mathring{B}(\alpha(\lambda), R_1(\lambda))$ selon le lemme précédent. En vertu d'un théorème de Weierstrass [Ahl], la fonction

$$\varphi_\lambda : \mathring{B}(\alpha(\lambda), R_1(\lambda)) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\lambda^n(z) - \alpha(\lambda)}{(f'_\lambda(\alpha(\lambda)))^n}$$

est holomorphe et

$$\varphi'_\lambda(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_\lambda^{n'}(z)}{(f'_\lambda(\alpha(\lambda)))^n}.$$

Dans notre cas, $\varphi'_\lambda(\alpha(\lambda)) = 1$. La relation $\varphi_\lambda(f_\lambda(z)) = f'_\lambda(\alpha(\lambda))\varphi_\lambda(z)$ est évidente.

Cqfd.

Proposition 3.2 (Proposition de la linéarisation). — Pour $c_0, W, f_c, \alpha(c)$ et $\rho(c)$ de la proposition 3.1, il existe un voisinage Ω de $\{(c, \alpha(c))\}_{c \in W}$ dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, un réel $R > 0$ et un isomorphisme $\varphi : \Omega \rightarrow W \times D_R$ (D_R est le disque ouvert) avec une famille de fonctions holomorphes $\varphi_c : \Omega_c \rightarrow D_R$ (où Ω_c est l'ensemble des $y \in \mathbb{C}$ tels que $(c, y) \in \Omega$) tels que pour $c \in W$.

- a) $\varphi(c, z) = (c, \varphi_c(z))$
- b) $\varphi_c(\alpha(c)) = 0$
- c) si $(c, z) \in \Omega$ et $(c, f_c^k(z)) \in \Omega$, on ait

$$\varphi_c(f_c^k(z)) = \rho(c)\varphi_c(z)$$

- d) si $(c, z) \in \Omega$ et $\rho(c)\varphi_c(z) \in D_R$, on ait

$$f_c^k(z) \in \Omega_c \text{ et } \rho(c)\varphi_c(z) = \varphi_c(f_c^k(z))$$

- e) $\varphi'_c(\alpha(c)) = 1$.

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate du lemme 2 en remplaçant par $\{f_\lambda^{-k}\}_{\lambda \in W}$ les fonctions $\{f_\lambda\}$ du lemme et en restreignant U_1 en un voisinage plus petit. Cqfd.

On dit que φ_λ est la coordonnée linéarisante. Donnons-nous maintenant quelques notations utiles :

- a) \mathcal{K} est l'ensemble des $(c, z) \in W \times \mathbb{C}$ tels que $z \in K_c$, donc $\mathcal{K} = \bigcup_{c \in W} \{c\} \times K_c$
- b) $\mathcal{Y}_R = \varphi(\Omega \cap \mathcal{K}) \subset W \times D_R$
- c) $Y_R(c)$ est l'ensemble des $y \in D_R$ tels que $(c, y) \in \mathcal{Y}_R$, i.e. $Y_R(c) = \varphi_c(\Omega_c \cap K_c)$
- d) $Y(c) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho(c)^n Y_R(c)$
- e) $\mathcal{Y} = \bigcup_{c \in W} \{c\} \times Y(c)$.

Proposition 3.3. — Pour tout $c \in W$, on a

- a) $\rho(c)Y_R(c) \cap D_R = Y_R(c)$,
- b) $\rho(c)Y(c) = Y(c)$ et $\frac{1}{\rho(c)}Y(c) = Y(c)$.

Démonstration

a) Si $\rho(c)y \in (\rho(c)Y_R(c)) \cap D_R$, il existe $z \in \Omega_c \cap K_c$ tel que $y = \varphi_c(z)$, donc $\rho(c)y = \varphi_c(f_c^k(z)) \in Y_R(c)$ (d), proposition 3.2). Si $y \in Y_R(c)$, alors $y = \varphi_c(z)$ et $y/\rho(c) = \varphi_c(f_c^{-k}(z)) \in Y_R(c)$.

b) Évidemment.

Cqfd.

Proposition 3.4. — Pour tout entier $i \geq 0$, $(f_{c_0}^i)'(c_0) \neq 0$.

Démonstration. — Le fait que $f_{c_0}(z) = z^2 + c$ induit $f_{c_0}'(z) = 2z$, donc $(f_{c_0}^i)'(c_0) = 2^i f_{c_0}^{i-1}(c_0) \cdot f_{c_0}^{i-2}(c_0) \cdots f_{c_0}(c_0)c_0 \neq 0$ car 0 n'est pas périodique i.e. 0 n'est pas dans l'orbite de $c_0 = f_{c_0}(0)$. Cqfd.

Théorème 1. — Pour $c_0 \in M$ un point de Misurewicz, on a

$$\rho(c_0)^n \tau_{-c_0}(K_{c_0}) \longrightarrow \frac{1}{(f_{c_0}^{\ell-1})'(c_0)} Y(c_0).$$

Démonstration. — Il existe un voisinage U de 0 tel que $f_{c_0}^{\ell-1} \circ \tau_{c_0}$ soit un isomorphisme entre U et Ω_{c_0} ; donc que $\varphi_1 = \varphi_{c_0} \circ f_{c_0}^{\ell-1} \circ \tau_{c_0}$ soit un isomorphisme de classe c_1 entre U et D_R avec $\varphi_1(0) = 0$ et $T \circ \varphi_1 = (f_{c_0}^{\ell-1})'(c_0)$.

Suivant la proposition 2.2, on trouve cqfd.

4. Une proposition technique

Supposons que $\Lambda \subset \mathbb{C}$ est un voisinage de 0 et que $\rho : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe avec $|\rho(\lambda)| > 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda$. Soit $X \subset \Lambda \times \mathbb{C}$ un ensemble invariant par $(\lambda, x) \mapsto (\lambda, \rho(\lambda)x)$ et $(\lambda, x) \mapsto (\lambda, \frac{1}{\rho(\lambda)}x)$, on note $X(\lambda)$ l'ensemble des $x \in \mathbb{C}$ tels que $(\lambda, x) \in X$. Supposons en plus que X est fermé et qu'il existe un sous-ensemble $A \subset X(0)$ dense dans $X(0)$ tel que A soit invariant par $x \mapsto \frac{1}{\rho(0)}x$ et $x \mapsto \rho(0)x$, et que pour tout $x \in A$, il existe un ouvert U_x voisinage de 0 dans Λ avec une fonction holomorphe $\xi_x : U_x \rightarrow \mathbb{C}$ ($\lambda \rightarrow \xi_x(\lambda)$) tel que $\xi(0) = x$ et $\xi(\lambda) \in X(\lambda)$. Soit $u : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe avec $u(0) = 0$ et $u'(0) \neq 0$, notons M_u l'ensemble des $\lambda \in \Lambda$ tels que $(\lambda, u(\lambda)) \in X$.

Sous toutes ces hypothèses-là, on affirme

Proposition 4.1

- a) $X(\lambda) \rightarrow X(0)$ quand $\lambda \rightarrow 0$.
- b) $\rho(0)^n M_u \rightarrow \frac{1}{u'(0)} X(0)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration

a) Pour $R > 0$, il suffit de démontrer $D(X(\lambda) \cap D_R \cup \partial D_R, X(0) \cap D_R \cup \partial D_R) \rightarrow 0$. La semi-continuité supérieure est une conséquence immédiate de la proposition 2.1. Pour la semi-continuité inférieure, il suffit de démontrer

$$\delta(A \cap D_R \cup \partial D_R, X(\lambda) \cap D_R \cup \partial D_R) \longrightarrow 0.$$

Supposons au contraire, qu'il existe un constant $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites $\{x_n\} \subset A \cap D_R$ et $\{\lambda_n\} \subset \Lambda$ tels que $\lambda_n \rightarrow 0$ et $d(x_n, X_R(\lambda_n)) \geq 2\varepsilon_0$. Comme $X(0) \cap D_R \cup \partial D_R$ est compact, on peut supposer $x_n \rightarrow x_0$ avec $x_0 \in X(0) \cap D_R$. Pour n assez grand et $y \in X(\lambda_n) \cap D_R$, on a

$$2\varepsilon_0 \leq d(x_n, y) \leq d(x_n, x_0) + d(x_0, y) < \varepsilon + d(x_0, y).$$

Par conséquent $d(x_0, X_R(\lambda_n)) \geq \varepsilon_0$, donc il existe $\tilde{x} \in A \cap D_R$ tel que $d(\tilde{x}, X_R(\lambda_n)) \geq \varepsilon_0/2$ quand n est assez grand. D'autre part, comme il y a un voisinage $U_{\tilde{x}}$ de 0 associé à \tilde{x} par l'hypothèse, il existe $n_1 > 0$, tel que quand $n > n_1$, on ait $\lambda_n \in U_{\tilde{x}}$ et puis $\tilde{\xi}(\lambda_n) \in X(\lambda_n)$, de plus, il existe aussi $n_2 \geq n_1$ tel que quand $n > n_2$, $|\lambda_n|$ soit assez petit pour que $|\xi_{\tilde{x}}(\lambda_n) - \tilde{x}| < \varepsilon_0/2$, donc $n > n_2$ entraîne $d(\tilde{x}, X(\lambda_n)) < \varepsilon_0/2$, i.e. $d(\tilde{x}, X_R(\lambda_n)) < \varepsilon_0/2$. Absurde.

b) (1) *Semi-continuité supérieure*. Il faut démontrer

$$\forall R > 0, \quad \delta\left((\rho(0)^n M_u) \cap D_R \cup \partial D_R, \left(\frac{1}{u'(0)} X(0)\right) \cap D_R \cup \partial D_R\right) \rightarrow 0.$$

Pour $\varepsilon > 0$ et n assez grand, si $y = \rho(0)^n \lambda \in (\rho(0)^n M_u) \cap D_R$, on a $\lambda \in M_u$ et $|\lambda| \leq R/|\rho(0)|^n$, donc $u(\lambda) \in X(\lambda)$ et $\rho(\lambda)^n u(\lambda) \in X(\lambda)$. Mais

$$\begin{aligned} d(\rho(\lambda)^n u(\lambda), \rho(0)^n u'(0) \lambda) &= d(\rho(\lambda)^n u(\lambda), u'(0) y) \\ &= |y| \cdot \left| \frac{\rho(\lambda)^n}{\rho(0)^n} \cdot \frac{u(\lambda)}{\lambda} - u'(0) \right| < R \left| \frac{\rho(\lambda)^n}{\rho(0)^n} \cdot \frac{u(\lambda)}{\lambda} - u'(0) \right|. \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \left| \log \frac{\rho(\lambda)^n}{\rho(0)^n} \right| &= \left| n \cdot \lambda \frac{\log \rho(\lambda) - \log \rho(0)}{\lambda} \right| \\ &= |y| \cdot \left| \frac{n}{\rho(0)^n} \right| \cdot \left| \frac{\log \rho(\lambda) - \log \rho(0)}{\lambda} \right| < R \left| \frac{\rho'(\lambda)}{\rho(\lambda)} + o(\lambda) \right| \cdot \left| \frac{n}{\rho(0)^n} \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quand $n \rightarrow +\infty$, donc $d(\rho(\lambda)^n u(\lambda), \rho(0)^n u'(0) \lambda) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$, de plus, cela converge uniformément par rapport à $y \in (\rho(0)^n M_u) \cap D_R$. Par conséquent, on peut supposer que $\rho(\lambda)^n u(\lambda) \in X(\lambda) \cap D_{2|u'(0)|R}$ pour n assez grand et pour tout $y \in \rho(0)^n M_u \cap D_R$. De $\delta(X_{2|u'(0)|R}(\lambda), X_{2|u'(0)|R}(0)) \rightarrow 0$, on déduit qu'il existe $N_1 > 0$, tel que quand $n > N_1$, $|\lambda|$ soit assez petit pour que $\delta(X_{2|u'(0)|R}(\lambda), X_{2|u'(0)|R}(0)) < \varepsilon/2$, d'où $d(\rho(\lambda)^n u(\lambda), X_{2|u'(0)|R}(0)) < \varepsilon/2$. D'autre part, il existe $N_2 > 0$ tel que pour $n > N_2$ et $y \in (\rho(0)^n M_u) \cap D_R$, on ait $d(u'(0)y, \rho(\lambda)^n u(\lambda)) < \varepsilon/2$. Donc quand $n_1 > \max\{N_1, N_2\}$, pour tout $y \in (\rho(0)^n M_u) \cap D_R$, on a

$$d(u'(0)y, X_{2|u'(0)|R}(0)) \leq d(u'(0)y, \rho(\lambda)^n u(\lambda)) + d(\rho(\lambda)^n u(\lambda), X_{2|u'(0)|R}(0)) < \varepsilon$$

d'où $\delta((\rho(0)^n M_u)_R, (\frac{1}{u'(0)} X(0))_R) \rightarrow 0$.

b) (2) *Semi-continuité inférieure* : $\delta((\frac{1}{u'(0)} X(0))_R, (\rho(0)^n M_u)_R) \rightarrow 0$. on est obligé de démontrer un lemme préalable.

Lemme. — Soit $x \in A \cap D_R$, et soit $\xi_x : U_x \rightarrow \mathbb{C}$ l'application associée.

a) Il existe Λ_x voisinage de 0 dans U_x et $n_x > 0$, tels que $\forall n \geq n_x, \exists ! \lambda_n \in \Lambda_x$, vérifiant $\rho(\lambda_n)^n u(\lambda_n) = \xi_x(\lambda_n)$.

b) $\lambda_n \in M_u, \lambda_n \rightarrow 0$ et $\rho(0)^n u'(0) \lambda_n \rightarrow x$.

Démonstration

a) Le fait que $\xi_x(\lambda) \in X(\lambda)$ induit $(1/\rho(\lambda)^n)\xi_x(\lambda) \in X(\lambda)$. Choisissons $a > 0$ tel que $\Lambda_x = D_a \subset U_x$ et que $u'(\lambda) \neq 0$ pour $\lambda \in \overline{D}_a$, donc $\deg u|_{\partial D_a} = 1$. Il existe $n_x > 0$ tel que quand $n \geq n_x, |\xi_x(\lambda)/\rho(\lambda)^n|_{\lambda \in \overline{D}_a} < \inf_{\lambda \in \partial D_a} |u(\lambda)|$. Notons h_n l'application $\lambda \mapsto u(\lambda) - \xi_x(\lambda)/\rho(\lambda)^n$, alors elle est holomorphe dans U_x et $h_n|_{\partial D_a} \neq 0$, de plus, $h_n|_{\partial D_a}$ est de degré 1. Cela induit que h_n possède un seul zéro dans D_a ([**Ru**], 10.43), i.e. il existe $\lambda_n(x) \in D_a \subset U_x$ unique tel que $u(\lambda_n) = \xi_x(\lambda_n)/\rho(\lambda_n)^n \in X(\lambda_n)$, quand $n > n_x$.

b) $\lambda_n(x) \in M_u$ et $\lambda_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) sont évidents, donc $d(\rho(\lambda_n)^n u(\lambda_n), x) \rightarrow 0$. Supposons $x \in A \cap D_R$, quitte à restreindre Λ_x , on peut supposer $\xi_x(\lambda) \in D_{2R} \cap X(\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda_x$, alors

$$\begin{aligned} |\rho(\lambda_n)^n u(\lambda_n) - \rho(0)^n u'(0) \lambda_n| &\approx |\rho(\lambda_n)^n u(\lambda_n)| \cdot \left| 1 - \frac{\rho(0)^n}{\rho(\lambda_n)^n} \right| \\ &= |\xi_x(\lambda_n)| \cdot \left| 1 - \frac{\rho(0)^n}{\rho(\lambda_n)^n} \right| < 2R \left| 1 - \frac{\rho(0)^n}{\rho(\lambda_n)^n} \right|. \end{aligned}$$

Mais

$$\left| \log \frac{\rho(\lambda_n)^n}{\rho(0)^n} \right| = \left| n \cdot \lambda_n \left(\frac{\rho'(0)}{\rho(0)} + o(\lambda_n) \right) \right|$$

et

$$n \lambda_n = n \left(\frac{u(\lambda_n)}{u'(0)} + o_1(\lambda_n) \right) = n \frac{\xi(\lambda_n)}{\rho(\lambda_n)^n} + n \lambda_n \frac{o(\lambda_n)}{\lambda_n}$$

donc

$$\left| n \lambda_n \right| < 2R \left| \frac{n}{\rho(\lambda_n)^n} \right| \cdot \left| \frac{1}{(1 - o(\lambda_n)/\lambda_n)} \right| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty),$$

$\left| \log \rho(\lambda_n)^n / \rho(0)^n \right| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), d'où $d(\rho(\lambda_n)^n u(\lambda_n), \rho(0)^n u'(0) \lambda_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$), par conséquent, $\rho(0)^n u'(0) \lambda_n \rightarrow x$. Fin du Lemme.

Démonstration de b) 2, Proposition 4.1. — Pour $R > 0$ et $\varepsilon > 0$, posons

$$V_\varepsilon = D_{R+\varepsilon/2} \setminus \overline{D}_{R-\varepsilon/2}.$$

Pour tout $x \in A$, posons $D(x, \frac{\varepsilon}{2})$ l'ensemble des $|y - x| < \varepsilon/2$. Alors les $V_\varepsilon \cup \bigcup_{x \in A \cap D_R} D(x, \varepsilon/2)$ forment un recouvrement ouvert de $X(0) \cap D_R \cup \partial D_R$, donc il existe $x_1, \dots, x_k \in A \cap D_R$ tels que

$$X(0) \cap D_R \cup \partial D_R \subset V_\varepsilon \cup \bigcup_{j=1}^k D(x_j, \varepsilon/2).$$

Pour ces $x_j \in A$, d'après le lemme qu'on vient de démontrer, il existe $\{\lambda_n(x_j)\} \subset M$ avec $\lambda_n(x_j) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) et $N_j > 0$ tel que $n > N_j$ entraîne

$$d(x_j, \rho(0)^n u'(0) \lambda_n(x_j)) < \varepsilon/2,$$

d'où

$$d(x_j, u'(0) \rho(0)^n M_u \cap D_R \cup \partial D_R) < \varepsilon/2.$$

Donc pour $n > N = \max\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$ et $x \in X(0) \cap D_R \cup \partial D_R$, si $x \in V_\varepsilon$, alors $d(x, (u'(0) \rho(0)^n M_u)_R) < \varepsilon/2$; si $x \in D(x_j, \varepsilon/2)$ pour quelque j , alors

$$d(x, u'(0) \rho(0)^n \lambda_n(x_j)) \leq d(x, x_j) + d(x_j, u'(0) \rho(0)^n \lambda_n(x_j)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donc

$$d(x, (u'(0) \rho(0)^n M_u)_R) < \varepsilon.$$

Finalement on a démontré que pour $R > 0$ et $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que $n > N$ entraîne $d(\frac{x}{u'(0)}, (\rho(0)^n M_u)_R) < \varepsilon$ pour $x \in (\frac{1}{u'(0)} X(0))_R$, d'où $\delta((\frac{1}{u'(0)} X(0))_R, (\rho(0)^n M_u)_R) < \varepsilon$. Cqfd.

5. Convergence de $\rho(c_0)^n \tau_{-c_0}(M)$

Revenons à K_c et à M .

Proposition 5.1. — Soit $v(c) = \varphi_c(f_c^\ell(0))$ où φ_c est la coordonnée linéarisante, alors $v'(c_0) \neq 0$.

Démonstration. — On note $u(c) = f_c^\ell(0)$ et $\Phi(c, z) = \varphi_c(z)$ alors $u(c_0) = \alpha(c_0) = \alpha_0$ et $v(c) = \Phi(c, u(c))$. Les calculs $v'(c_0) = \Phi'_c(c_0, \alpha_0) + \Phi'_z(c_0, \alpha_0) u'(c_0)$ et $\Phi'_z(c_0, \alpha_0) = \varphi'_{c_0}(\alpha_0) = 1$ nous donnent $v'(c_0) = \Phi'_c(c_0, \alpha_0) + u'(c_0)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow c_0} \frac{\Phi(c, \alpha_0) - \Phi(c_0, \alpha_0)}{c - c_0} &= \lim_{c \rightarrow c_0} \frac{\Phi(c, \alpha_0) - \Phi(c, \alpha(c))}{c - c_0} \\ &= -\Phi'_z(c_0, \alpha_0) \cdot \alpha'(c_0) = -\alpha'(c_0). \end{aligned}$$

Donc $v'(c_0) = u'(c_0) - \alpha'(c_0) = \omega'(c_0)$ où $\omega(c) = u(c) - \alpha(c)$. En vertu d'un lemme du chapitre V de [D-H], $\omega'(c_0) \neq 0$, d'où $v'(c_0) \neq 0$. Cqfd.

Théorème 2. — $\rho(c_0)^n \tau_{-c_0}(M) \rightarrow \frac{1}{v'(c_0)} Y(c_0)$ ($n \rightarrow \infty$).

Démonstration. — Le résultat est en fait une conséquence directe de la proposition 4.1. Il reste seulement à établir la correspondance entre les résultats obtenus de M et les conditions de cette proposition.

On peut dire que M est l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ tels que $u(c) = f_c^\ell(0) \in K_c$. Donc $W \cap M$ est l'ensemble des $c \in \mathbb{C}$ tels que $v(c) = \varphi_c(u(c)) \in Y(c)$. Quitte à restreindre W , on peut supposer que $\Lambda = \tau_{-c_0}(W)$ est un voisinage de 0.

Soient \mathcal{X} l'image de \mathcal{Y} par $(c, z) \rightarrow (c - c_0, z)$ et $X(c - c_0) = Y(c)$. Notons en plus $\tilde{\rho}(\lambda) = \rho(\lambda + c_0)$ pour $\lambda \in \Lambda$. En vertu de la proposition 3.3, $X(\lambda)$ est invariant par

$x \mapsto \tilde{\rho}(\lambda)x$ et $x \mapsto (1/\tilde{\rho}(\lambda))x$. B désignera l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que z soit un point prépériodique répulsif de f_{c_0} et que l'orbite de z par f_c ne contienne pas 0, alors B est dense dans K_{c_0} par le théorème de Fatou. Pour $z \in B \cap \Omega_{c_0}$, il existe $z_1 \in K_{c_0} \cap \Omega_{c_0}$ tel que $z = f_{c_0}^k(z_1)$ (proposition 1.2, c), donc $z_1 \in B \cap \Omega_{c_0}$. D'autre part, $f_{c_0}^k(z) \in B$, donc $A = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \rho(c_0)^p \cdot \varphi_{c_0}(B \cap \Omega_{c_0})$ est invariant par $y \mapsto \rho(c_0)y$ et $y \mapsto (1/\rho(c_0))y$. De plus, A est dense dans $Y(c_0) = X(0)$. Pour $z_0 \in B$, il existe deux entiers $m > 0$ et $n > 0$ vérifiant $f_{c_0}^{m+n}(z_0) - f_{c_0}^m(z_0) = 0$. Posons $F(c, z) = f_c^{m+n}(z) - f_c^m(z)$, alors $F(c_0, z_0) = 0$ et $F'_z(c_0, z_0) = f_{c_0}^{m'}(z_0)(f_{c_0}^{n'}(f_{c_0}^m(z_0)) - 1)$. Comme l'orbite de z_0 ne contient pas 0 et $f_{c_0}^m(z_0)$ est périodique répulsif,

$$f_{c_0}^{m'}(z_0) = 2^m f_{c_0}^{m-1}(z_0) \cdots f_{c_0}(z_0) z_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad f_{c_0}^{n'}(f_{c_0}^m(z_0)) - 1 \neq 0.$$

En utilisant le théorème des fonctions implicites, nous trouvons qu'il existe V_{z_0} un voisinage de c_0 et $g : V_{z_0} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe avec $g(c_0) = z_0$ et $F(c, g(c)) = 0$, par suite, $g(c)$ est prépériodique répulsif pour f_c et puis $g(c) \in K_c$.

Pour un point $y_0 \in A$, il existe $z_0 \in B \cap \Omega_{c_0}$ tel que $y_0 = \rho(c_0)^n \varphi_{c_0}(z_0)$. Posons

$$\eta(c) = \rho(c)^n \varphi_c(g(c)) \quad \text{pour } c \in V_{z_0}$$

alors η est holomorphe avec $\eta(c_0) = \rho(c_0)^n \varphi_{c_0}(z_0) = y_0$ et $\eta(c) \in Y(c)$.

Posons en plus $U_{y_0} = \tau_{-c_0}(V_{z_0})$ et $\xi(\lambda) = \eta(\lambda + c_0)$, alors $\xi(0) = \eta(c_0) = y_0$ et $\xi(\lambda) \in Y(\lambda + c_0) = X(\lambda)$. C'est-à-dire pour tout $x \in A \subset X(0)$, il existe un voisinage U_x de 0 avec $U_x \subset \Lambda$ et une fonction holomorphe $\xi_x : U_x \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\xi_x(0) = x$ et que $\xi_x(\lambda) \in X(\lambda)$, donc toutes les conditions de la proposition 4.1 sont parfaitement remplies, on peut affirmer finalement

$$\tilde{\rho}(0)^n \tilde{M} \longrightarrow \frac{1}{\tilde{V}'(0)} X(0)$$

$$i.e. \rho(c_0)^n \tau_{-c_0}(W \subset M) \rightarrow \frac{1}{v'(c_0)} Y(c_0).$$

Cqfd.

Références

- [Ahl] L.V. AHLFORS – *Complex analysis*, 3^e éd., McGraw-Hill Book Co., New York, 1978.
- [D-H] A. DOUADY & J.H. HUBBARD – « On the dynamics of polynomial-like mappings », *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* 4^e série **18** (1985), no. 2, p. 287–343.
- [Ru] W. RUDIN – *Real and complex analysis*, 3^e éd., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

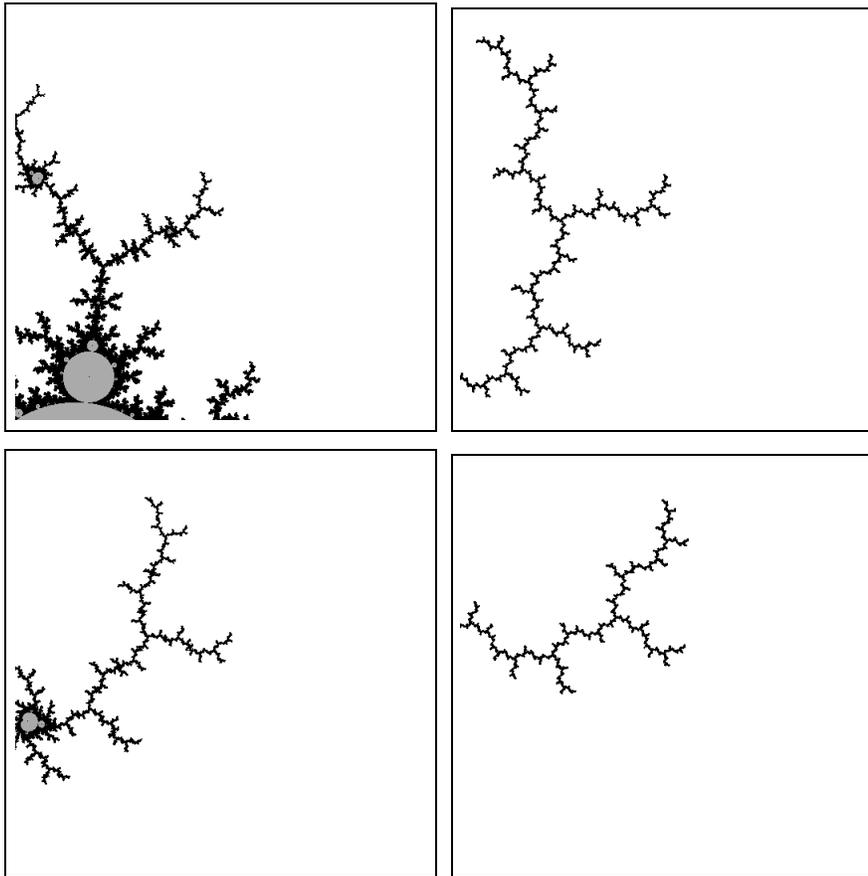


FIGURE 1. A gauche, 2 agrandissements sur l'ensemble de Mandelbrot. A droite, 2 agrandissements sur l'ensemble de Julia du polynôme quadratique $z \mapsto z^2 + i$. Les fenêtres sont toutes centrée sur i .

