

Chapitre 2 Matrices

Une matrice est un tableau de nombres réels,
plus précisément, si m et n sont des entiers naturels, $m > 0$ et $n > 0$,
une matrice $m - n$ est un tableau comportant m lignes et n colonnes.

Exemples : Le point $J(7, -5)$ peut être représenté par une matrice $1 - 2$ (sans virgule!).

Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ peut être représenté par une matrice $2 - 1$.

$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3,1 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice $3 - 2$.

$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice $2 - 3$.

L'usage est de noter $a_{i,j}$ le nombre situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne
de la $m - n$ matrice A , pour tous i et j , $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \\ m_{3,1} & m_{3,2} \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} \end{pmatrix}$.

1) Somme

m et n étant fixés, on peut ajouter les matrices $m - n$ A et B .

Par définition, $A + B = C$ est la matrice $m - n$ définie par $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$,
pour tous i et j , $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

C'est une bête somme "terme à terme",

exemple connu : la somme de deux vecteurs.

2) Produit par un réel

Soient A une matrice $m - n$ et λ un réel.

$B = \lambda A$ est la matrice $m - n$ définie par

$b_{i,j} = \lambda a_{i,j}$, pour tous i et j , $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

La matrice $(-1)A$ est notée $-A$.

Soustraction : Définition :

$A - B = A + (-B)$.

3) Produit de deux matrices

m , n et p étant des entiers, $m > 0$, $n > 0$ et $p > 0$,

A étant une matrice $m - n$ et B étant une matrice $n - p$,

le produit $C = AB$ est la matrice $m - p$ définie par

$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n (a_{i,k} \cdot b_{k,j})$,
pour tous i et j , $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$.

Disposition pratique :

$$\begin{pmatrix} \dots & b_{1,j} & \dots & \dots \\ \dots & b_{2,j} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & b_{n,j} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

On explicite en français :

le produit MN n'est défini

que si le nombre de colonnes de M = le nombre de lignes de N . (*)

Ici ce nombre est n .

Le terme général $c_{i,j}$ de MN est la somme terme à terme de tous les $a_{i,k} \cdot b_{k,j}$,
 k entre 1 et n ,

cette somme ne pouvant être effectuée que grâce à la condition (*).

La règle magique "ligne par colonne" résume tout.

4) Propriétés des opérations

Dans ce qui suit, A , B et C sont des matrices, λ et μ sont des réels, et on suppose que toutes les opérations écrites peuvent être effectuées.

a) Propriétés évidentes

$$A + B = B + A.$$

$$(A + B) + C = A + (B + C). \text{ On s'autorise à l'écrire } A + B + C.$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B. (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$$

b) Propriétés qu'on pourrait prouver :

$$A(B + C) = AB + AC \text{ et } (B + C).A = BA + CA.$$

(on distribue "par la droite"), et même :

$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC.$$

c) Une propriété admise :

$$(AB)C = A(BC).$$

On s'autorise à l'écrire ABC .

Preuve pénible même pour des petites matrices.

d) Remarque :

Avec l'exemple du début du cours, la règle (*) montre qu'on peut calculer MN , c'est une matrice $3 - 3$, et NM qui est $2 - 2$.

Ceci prouve que même si on peut calculer MN et NM

(ce qui n'est le cas qu'avec deux matrices du type $m - n$ et $n - m$) on peut avoir $MN \neq NM$.

5) Quelques matrices particulières

a) Matrices nulles

m et n étant fixés,

on note $Z_{m,n}$ la matrice $m - n$ dont tous les coefficients valent 0.

$$\text{Pour toute matrice } m - n \text{ } A, A + Z_{m,n} = A.$$

$$\text{Pour toute matrice } n - p \text{ } B, Z_{m,n}B = Z_{m,p}.$$

$$\text{Pour toute matrice } p - m \text{ } C, CZ_{m,n} = Z_{p,n}.$$

On prend $m = n = 2$ et on pose $Z = Z_{2,2}$.

Si $Z = A$ ou $Z = B$, alors $AB = Z$. La réciproque est elle vraie ?

$$\text{Soient } A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Calculer } AB.$$

b) Matrices carrées

du type $n - n$

c) Matrices diagonales

carrées et vérifiant $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

d) Matrices Identité

diagonales et vérifiant $a_{i,i} = 1$ pour tout i .

Désignant par I_n la matrice Identité $n - n$,

on prouve facilement que pour toute matrice $m - n$ A , $AI_n = A$ et pour toute matrice $n - m$ B , $I_nB = B$.

On désigne par M_n l'ensemble des matrices carrées $n - n$.

Pour toute A de M_n , $AI_n = I_nA = A$.

On dit que I_n est l'élément neutre de M_n .

6) Inversion

Dans Q , tout $x = \frac{a}{b}$ non nul a un inverse $y = \frac{b}{a}$ vérifiant $xy = yx = 1$.

Dans Z , seuls -1 et 1 ont un inverse.

Dans M_n on a une situation intermédiaire...

Définition : Soit A une matrice dans M_n .

S'il existe B dans M_n vérifiant $AB = BA = I_n$,

on dit que A est inversible.

Quand c'est le cas, il existe une seule telle matrice B (Exercice !),

on dit que B est l'inverse de A et on note $B = A^{-1}$.

Théorème (hors – programme) : On se limite à $n = 2$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Soit $D = ad - bc$. Si $D \neq 0$, alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exercice 1 : Si $D = 0$, alors A n'est pas inversible.

Indication : traiter à part le cas où $a = b = 0$

puis dans le cas contraire montrer que

A peut s'écrire sous la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$ et conclure.

Exercice 2 : se persuader avec une simulation en Python

avec $a = \text{random.randint}(1, x)$ qui simule un entier entre 1 et x

(taper avant : `random import`),

que "la plupart" (!) des matrices sont inversibles.

On se limite à M_2 . Prendre a, b, c et d au hasard entre 1 et $x = 10$.

Après ce calcul de fréquence calculer la probabilité d'avoir A inversible,

quand on prend a, b, c et d au hasard entre 1 et $x = 10$.

Il y a encore moins de matrices non inversibles quand on prend x plus grand.

Exercice 3 : Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1/3 \\ 1 - 2a & -2b \end{pmatrix}$.

Calculer AB . A a une infinité d'"inverses à droite".

Montrer sans trop de calculs que A n'a pas d'"inverse à gauche".

Ensuite on inversera seulement des matrices carrées.

Exercice 4 : Soient A, M et N des matrices vérifiant $AM = AN$.

$A - t$ – on nécessairement $M = N$?

Exercice 5 : Le plan étant muni d'un repère, on se demande

s'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant

par les points $P(1;4)$, $Q(-2;-5)$ et $R(-1;0)$.

1) Montrer qu'on doit résoudre un système

du type $AX = B$ où A est une matrice $3 - 3$,

X est la matrice – colonne $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2) Montrer que $A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ et conclure.

7) Puissances

Soit A une matrice $m - m$. On pose $A^0 = Id$ (convention), $A^1 = A$, $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$,
 $\dots A^k = AAA\dots A$ (on écrit k fois A) pour tout entier $k > 0$. Bien sûr, $A^n \cdot A^p = A^{n+p}$.

Exercice 6 : Soient a, b des nombres réels. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout $n > 0$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

Plus généralement, si $B = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_m \end{pmatrix}$, alors $B^n = \begin{pmatrix} a_1^n & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_2^n & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$

(où tous les $\dots$ valent 0).

Exercice 7 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout $n > 0$, $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$.

Exercice 8 : Am Sud Nov 2015 : diagonalisation d'une matrice M au 4)a) : D=P⁻¹MP

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, 10 % des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, 5 % des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n , on note :

- R_n l'effectif de la population rurale, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010 + n ,
- C_n l'effectif de la population citadine, exprimé en millions d'habitants, en l'année 2010 + n .

On a donc $R_0 = 90$ et $C_0 = 30$.

1. On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,05 \\ 0,1 & 0,95 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n ,

$$U_n = \begin{pmatrix} R_n \\ C_n \end{pmatrix}.$$

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = MU_n$.

b. Calculer U_1 . En déduire le nombre de ruraux et le nombre de citadins en 2011.

2. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de M^n et de U_0 .

3. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de P et on la notera P^{-1} .

4. a. On pose $\Delta = P^{-1}MP$. Calculer Δ à l'aide de la calculatrice.

b. Démontrer que : $M = P\Delta P^{-1}$.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$M^n = P\Delta^n P^{-1}.$$

5. a. On admet que le calcul matriciel précédent donne :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times 0,85^n \\ \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \times 0,85^n & \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 0,85^n \end{pmatrix}.$$

En déduire que, pour tout entier naturel n , $R_n = 50 \times 0,85^n + 40$ et déterminer l'expression de C_n en fonction de n .