Le pari des mois des anniversaires

Si on vous parle d'un résultat qui contredit l'intuition, vous pensez peut-être au paradoxe des anniversaires. Dans ce qui suit, il vous est proposé de le revisiter en ne s'intéressant plus au jour d'anniversaire, mais au mois d'anniversaire !

Jean-François Kentzel

Activité en classe

Les élèves forment des groupes de cinq. Vous pariez alors avec chaque groupe qu'au moins deux d'entre eux sont nés le même mois. S'il y a un groupe incomplet, les élèves doivent y ajouter une ou des personnes absentes qu'ils connaissent pour arriver à cinq. Quelle est la probabilité de gagner un pari de ce type ? En supposant l'équiprobabilité des mois de naissance (ce qui est raisonnable d'après l'INSEE, j'ai vérifié), elle est d'environ 0,62 pour chaque groupe.

Paris avec les élèves

Faire des paris avec les élèves (ce qui est un peu se mettre en danger, sans crainte tant on sait qu'on finira par gagner !) me semble être une façon de les intéresser au calcul des probabilités. Si vous êtes fatigué ce jour-là ou si vous avez une classe volontiers agitée, vous pouvez prudemment remplacer 5 par 6 pour l'effectif des groupes, votre probabilité de gagner monte alors à environ 0,78. Inversement pour pimenter les paris, vous pouvez parler de disons 100 € de pari par groupe... en précisant assez vite que c'était une blague, pour éviter pétitions et phénomènes de triche !

Simulations avec un tableur

Fort utiles si vous n'avez pas eu de chance avec les paris ! Si vous avez parfois une salle informatique, c'est une occasion de revoir le symbole $ avec les élèves. Dans ce cas en dire le moins possible au départ... puis tout dire peu à peu ensuite pour ceux qui seront ravis de seulement recopier des formules afin de produire une page qui fonctionne.

Par exemple, pour un groupe de cinq élèves, en ligne 2 de la feuille de calcul :

- dans les cellules `A2` à `E2`, on simule avec `=ALEA.ENTRE.BORNES(1;12)` ;
- puis on écrit en `G2` la formule `=NB.SI($A2:$E2;A2)` que l'on étire jusqu'à `K2` ;
- on tape enfin `=MAX(G2:K2)` en `M2`. Le pari est perdu quand ce maximum vaut 1.

Si on souhaite simuler avec 100 groupes, on copie 99 fois la ligne 2 et on tape la formule `=NB.SI(M2:M101;1)` dans la cellule `O2` par exemple.

Version simplifiée du « paradoxe des anniversaires »

Le « paradoxe des anniversaires »

Ce qui précède n'en est qu'une version simplifiée. Si vous ne connaissez que vaguement cette histoire classique, pour expliquer le mot « paradoxe », je vous pose cette question :

Désignons par $f(n)$ la probabilité que dans un groupe de n personnes ($n > 1$), au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire. Bien sûr, oubliant les 29 février et supposant l'équiprobabilité des 365 autres dates, ce que

l'INSEE confirme, f est une suite croissante vérifiant $f(2) = \dfrac{1}{365}$ et $f(n) = 1$ si $n > 365$.
À partir de quelle valeur de n a-t-on un « pari gagnant », c'est-à-dire $f(n) > 0{,}5$?

Essayez de répondre « intuitivement », fixez-vous un nombre, non, soyons sérieux, un intervalle ! Du coup vous serez plus indulgent en entendant les réponses très fausses de vos élèves pour cette question, à vrai dire pas sérieuse (c'est une question vraiment horrible !), seulement destinée à tenter d'expliquer le mot « paradoxe ». La réponse est à la fin de ce texte.

La taille des arbres

Un intérêt de cette version simplifiée est qu'elle est compréhensible avec des arbres de dénombrement « de taille humaine ». Pour les mois d'anniversaires, avec $n = 5$ élèves on a $12^5 = 248\,832$ branches, soit le nombre d'habitants d'une grande ville et on peut tranquillement l'ébaucher au tableau... Dans le cas des dates d'anniversaire, pour une classe de 35 élèves on a un arbre de taille 365^{35} qui est le nombre, annoncé par Python en une seconde, oups,

$$\begin{array}{l}478\,905\,975\,539\,166\,587\,008\,090\,776\,702\,255\\ 479\,679\,025\,347\,605\,612\,105\,677\,694\,592\,325\\ 133\,271\,515\,369\,415\,283\,203\,125\end{array}$$

nombre de 90 chiffres, soit dix milliards de fois certaines estimations du nombre d'atomes de l'univers connu. Au tableau ça devient plus confus.

Un calcul de probabilités

À mon avis, un des intérêts du pari des mois d'anniversaires est l'utilisation de la « formule du complémentaire », simplette et anodine mais semblant ici incontournable si on s'oblige à n'utiliser que des arbres de dénombrement.

Grâce à cette formule du complémentaire, pour des groupes de cinq élèves,

$$\begin{aligned}&P(\text{« gagner le pari »})\\ &\quad = 1 - P(\text{« Les cinq mois sont distincts »})\\ &\quad = 1 - \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5}\\ &\quad \approx 0{,}62\end{aligned}$$

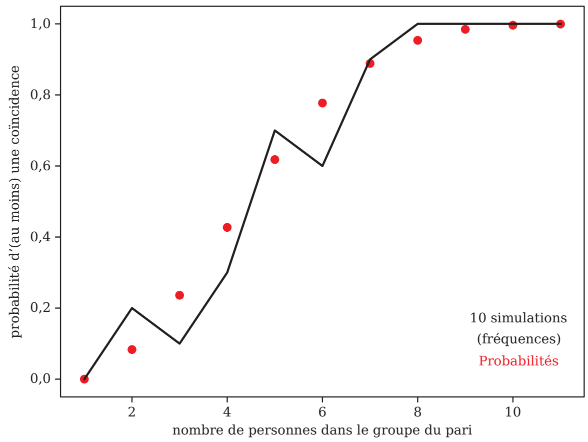
On a seulement dénombré

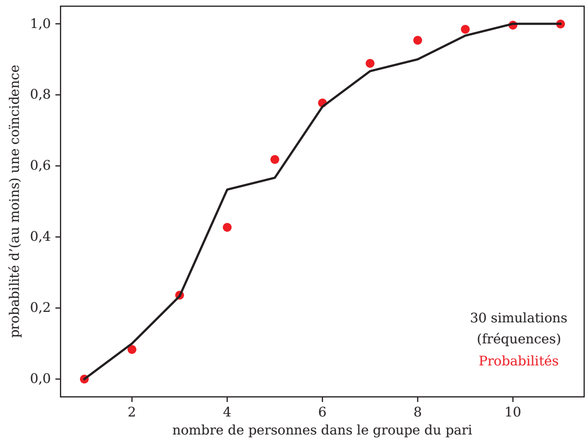
$$12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95\,040 \text{ branches}$$

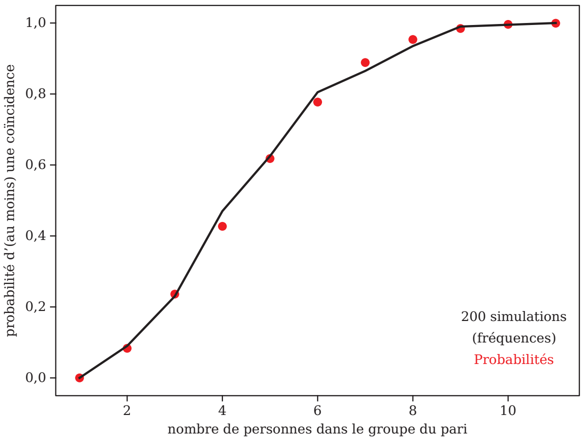
où tous les mois sont distincts, parmi les 248 832 possibles.

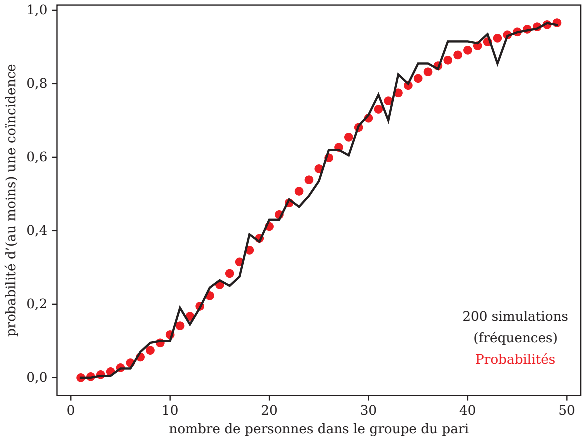
Un peu de Python, par exemple pour les élèves de spé NSI

Un programme Python de 90 lignes, dont beaucoup de commentaires, permet d'obtenir les graphiques ci-dessous :

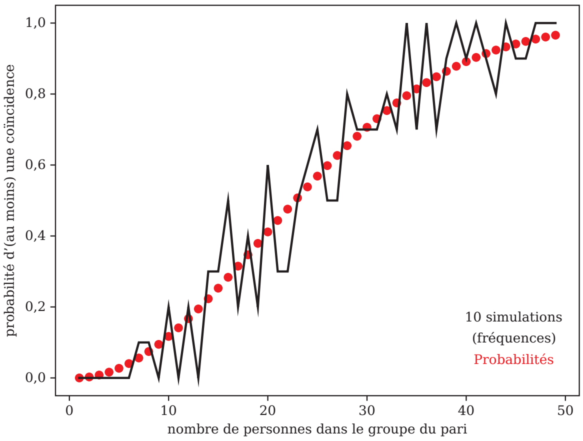


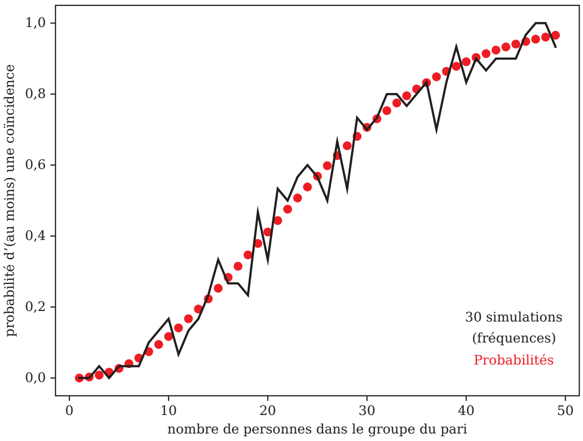






En remplaçant trois fois 12 par 365 dans ce programme et en modifiant les abscisses du graphique, j'obtiens ces graphiques qui racontent l'histoire des anniversaires :





En guise de conclusion

Il y a dix-huit ans, j'avais écrit l'article *Coïncidences des dates d'anniversaires*, dans le Bulletin Vert de l'APMEP ( ). Il contient le résultat suivant : la probabilité de l'événement « il y a au moins une coïncidence d'anniversaires » dépasse 0,5 quand n dépasse 22 et vaut environ 0,8 pour n égal à 34.

Je ne me suis pas lassé de ce sujet. Probablement rares sont les classes où je n'en ai pas parlé ! Quel bonheur de croiser un ex-élève qui avait mémorisé ces nombres 34 et 0,8 des années après son passage au lycée !

Ces dernières années j'ai souvent commencé par faire le « pari des mois d'anniversaires », beaucoup moins spectaculaire (il serait abusif de parler de paradoxe, avec cinq mois on remplit, s'ils sont distincts, presque la moitié des cases des mois. . .) mais semblant plus compréhensible.

Quelques commentaires du présent texte et quelques fichiers tableur ou `.py` sont accessibles sur l'ENT du lycée Pardailhan, à la dernière ligne, intitulée « Pari des mois d'anniversaires », de cette page : .

À la retraite depuis peu, Jean-François Kentzel enseignait au lycée Pardailhan à Auch (Gers).